

## 大椭圆轨道航天器编队飞行相对运动分析\*

安雪滢 杨乐平 张为华 郝晓宁

(国防科技大学 航天与材料工程学院 湖南 长沙 410073)

**摘要** :大椭圆轨道航天器在较长轨道周期内运行于远地点上空,因而该轨道多应用于卫星通信、天体观测、空间磁场探测等。上述空间任务所需的多航天器协同运动理论亟待解决。利用运动学方法推导了大椭圆轨道编队的相对运动模型,简要证明了实现长期近距离编队的必要条件,分析了相对轨道根数对线性化模型精度及其动力学特性的影响。仿真结果表明,相对运动模型在轨道远地点处精度较高,适当选择相对轨道根数可设计出满足任务要求的编队轨道。

**关键词** :大椭圆轨道;编队飞行;相对运动;运动学法;相对轨道根数

中图分类号 :V412 文献标识码 :A

## Relative Motion Analysis of the Spacecraft Formation Flight in Highly Elliptic Orbits

AN Xue-ying, YANG Le-ping, ZHANG Wei-hua, XI Xiao-ning

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** :The spacecraft on highly elliptic orbits fly over their apogee in the most part of their cycles, so this kind of orbit is usually applied in the satellite communication, the observation of celestial bodies and the exploration of space magnetic fields. The kinematics of multi-spacecraft formation is required to deal with the above space missions. Formulations of the relative motion on highly elliptic orbits are presented by kinematic method. On the basis of them, the necessary condition is given to maintain the long-term and close formations. The influence of relative orbital elements on the precision of this linear simplified formulation is discussed and on the dynamic characteristics of relative trajectories. The simulation results show that the formulations are more precise at the orbit apogee. If the relative orbital elements were selected properly, the design formation orbit would satisfy the requirements of the aforementioned missions.

**Key words** :highly elliptic orbit; formation flying; relative motion; kinematic method; relative orbital elements

大椭圆轨道的远地点相当于地球半径的数倍甚至数十倍,因而运行于大椭圆轨道上的航天器可以在较长轨道周期内运行于地面站上空,完成各种空间科学和军事任务,如观测天体运动,探察外大气层及空间磁场的物理特性<sup>[1]</sup>,对地通讯、对地监视及空间预警等。上述空间任务往往需要多航天器依赖相对位置关系和星间通讯协作共同完成,或者需要 HEQ (highly elliptic orbit) 冗余卫星提供在轨服务和轨道监测,因此研究大椭圆轨道上两航天器间的相对运动规律成为亟待解决的理论问题。

关于椭圆轨道航天器编队运动及其轨道设计,国内研究大多集中于主航天器为圆轨道,从航天器运行于小偏心率轨道的编队任务<sup>[2~4]</sup>,专门针对大椭圆轨道编队理论的研究工作尚未见到。至于研究方法,国外部分研究者采用动力学法,包括 Hill 方程和 Lawden 方程<sup>[5,6]</sup>,但前者仅适于短期编队,后者形式复杂不适于编队设计。运动学法探讨任意轨道相对运动独具优势,不仅物理意义明确,而且未对轨道偏心率加以限制,被多数学者采纳和应用<sup>[2,4,7]</sup>。

## 1 相对运动学原理

主航天器轨道根数记为  $\sigma_c(a_c, e_c, i_c, \Omega_c, \omega_c, f_c)$ ,从航天器的轨道根数记为  $\sigma_d(a_d, e_d, i_d, \Omega_d, \omega_d, f_d)$ ,

\* 收稿日期 2004-09-10

基金项目 国家 863 基金资助项目(2003AA769030)

作者简介 安雪滢(1978—),女,博士生。

$f_d$ ) 主从航天器轨道根数之差,即相对轨道根数记为  $\Delta\sigma = \sigma_d - \sigma_c$ 。

### 1.1 相对运动模型

为了描述空间任意轨道上两航天器之间的相对运动,通常使用的空间坐标系包括地心赤道惯性坐标系  $O_eXYZ$ ,主航天器的地心轨道坐标系  $O_cx_cy_cz_c$  及其结体坐标系  $Cxyz$ ,三者的空间关系如图 1 所示。图中,  $O_e$  表示地心,  $C$  和  $D$  分别为主航天器和从航天器的质心。地心赤道惯性坐标系的原点位于地心,  $O_eX$  轴指向春分点,  $O_eZ$  轴指向北极,  $O_eY$  轴位于赤道平面内,且垂直于  $O_eX$  轴。地心轨道坐标系  $O_cx_cy_cz_c$  的  $O_cx_c$  轴沿轨道矢径  $r_c$  方向,指向主航天器  $C$ ;  $O_cy_c$  轴在轨道平面内,垂直于矢径  $r_d$ ;  $O_cz_c$  轴与动量矩矢量  $H_c$  一致。主航天器的结体坐标系始终平行于地心轨道坐标系,且三轴指向相同,只不过原点平移至主航天器质心。

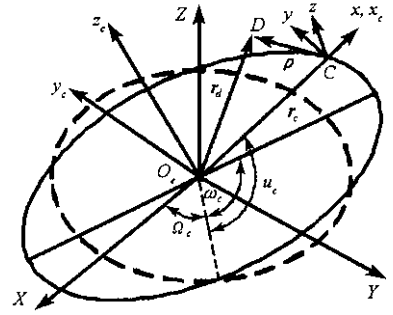


图 1 坐标系间的空间位置关系  
Fig.1 Positional relationship between space coordinates

$r_c$  和  $r_d$  分别为两航天器的矢径,  $\rho$  为主从航天器的相对矢径,且  $\rho$  在  $Cxyz$  中的分量列阵为  $[x \ y \ z]^T$ 。  $M_i^C$  和  $M_i^D$  分别表示惯性坐标系到主从航天器地心轨道坐标系的转换矩阵。当不考虑摄动以及主动控制因素时,相对矢径  $\rho = r_d - r_c$  的分量列阵在主航天器的结体坐标系中表示为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_i^C(M_i^D)^T \begin{pmatrix} r_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$(v_c)_c = [v_{rc} \ v_{uc} \ 0]^T$  和  $(v_d)_d = [v_{rd} \ v_{ud} \ 0]^T$  分别为主从航天器在各自轨道坐标系中的速度分量列阵,  $\dot{\omega}$  为坐标系  $O_cx_cy_cz_c$  的瞬时角速度,其分量列阵为  $[0 \ 0 \ \dot{\omega}]^T$ 。根据旋转坐标系的矢量导数公式,分别对  $\rho = r_d - r_c$  的两边求导,可得到两航天器相对速度矢量  $V$  在  $Cxyz$  坐标系中的分量描述:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = M_i^C(M_i^D)^T \begin{pmatrix} v_{rd} \\ v_{ud} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{rc} \\ v_{uc} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega} & 0 \\ \dot{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2)$$

在方程(1)和(2)的基础上,继续推导用于大椭圆编队飞行仿真和轨道设计的一阶近似模型。由于主从航天器在一定时间内保持近距离飞行,航天器间的距离  $d$  与地心距  $r$  之比非常小,所以可以视主从航天器的相对轨道根数均为小量,即  $\Delta\sigma(\Delta a \ \Delta e \ \Delta i \ \Delta\Omega \ \Delta u) \ll 1$ 。其中,航天器纬度幅角等于近地点角和真近点角之和,即  $u_n = \omega_n + f_n(n = d, c)$ ,所以  $\Delta u = \Delta\omega + \Delta f$ 。对大椭圆轨道,航天器的瞬时角速度随时间不断变化,主从航天器的真近点角之差也随之改变,所以即使初始状态的  $\Delta\omega$  和  $\Delta f$  之和为小量,也无法保证纬度幅角之差在任意时刻为小量。因此,椭圆轨道的近距离编队必须保证  $\Delta\sigma(\Delta a \ \Delta e \ \Delta i \ \Delta\Omega \ \Delta\omega \ \Delta f)$  为小量。

在二体假设下,采用独立轨道根数  $\sigma(a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ M)$  描述大椭圆编队运动方程。保留  $\Delta\sigma(\Delta a \ \Delta e \ \Delta i \ \Delta\Omega \ \Delta\omega \ \Delta M)$  的一阶量,根据椭圆运动的一些基本导数关系式<sup>[8]</sup>,可将(1)式化简为:

$$x = \frac{r_c}{a_c} \cdot \Delta a - a_c \cos f_c \cdot \Delta e + \frac{a_c e_c}{\sqrt{1 - e_c^2}} \sin f_c \cdot \Delta M \quad (3a)$$

$$y = r_c \left[ \frac{\sin f_c}{1 - e_c^2} (2 + e_c \cos f_c) \cdot \Delta e + \cos i_c \cdot \Delta\Omega + \Delta\omega + \left(\frac{a_c}{r_c}\right)^2 \sqrt{1 - e_c^2} \cdot \Delta M \right] \quad (3b)$$

$$z = r_d [\sin(\omega_d + f_d) \cdot \Delta i - \sin i_c \cos(\omega_d + f_d) \cdot \Delta\Omega] \quad (3c)$$

从航天器相对于主航天器的三个方向速度分量分别为:

$$\dot{x} = -\frac{v_{rc}}{2a_c} \cdot \Delta a + \sqrt{\frac{\mu}{a_c}} \left(\frac{a_c}{r_c}\right)^2 (\sin f_c \sqrt{1 - e_c^2} \cdot \Delta e + e_c \cos f_c \cdot \Delta M) \quad (4a)$$

$$\dot{y} = -\frac{3v_{uc}}{2a_c} \cdot \Delta a + \frac{\Delta e}{1 - e_c^2} \{v_{rd} \sin f_c (2 + e_c \cos f_c) + v_{ud} [2 \cos f_c (1 + e_c \cos f_c) - e_c]\} +$$

$$v_{rd}(\cos i_c \cdot \Delta\Omega + \Delta\omega) + \frac{a_c}{r_c} \sqrt{1 - e_c^2} \left( v_{rd} \frac{a_c}{r_c} - v_{uc} \frac{2e_c \sin f_c}{1 - e_c^2} \right) \cdot \Delta M \quad (4b)$$

$$\dot{z} = [v_{rd} \sin(\omega_d + f_d) + v_{ud} \cos(\omega_d + f_d)] \cdot \Delta i + \sin(i_c) \cdot \dot{\Omega} - v_{rd} \cos(\omega_d + f_d) + v_{ud} \sin(\omega_d + f_d) \cdot \Delta\Omega \quad (4c)$$

其中,在任意时刻  $t$ ,两航天器的平近点角之差  $\Delta M(t)$  可以表示为:

$$\Delta M(t) = n_d(\Delta t + t_0 - \tau_d) - n_c(\Delta t + t_0 - \tau_c) = \Delta n \Delta t + \Delta M_0 \quad (5)$$

式中  $\Delta M_0$  为初始时刻  $t_0$  主从航天器的平近点角之差  $\Delta t = t - t_0$ ,  $\Delta n = n_d - n_c$ 。

## 1.2 长期近距离编队

在实际编队仿真和轨道设计中,往往要求主从航天器可以在相当长的时间内保持近距离的相对运动,以便随时监测主航天器的运行状态,并为其提供在轨服务,或者保持观测基线,等等。由于相对运动方程(3)含有  $\Delta M$  的线性项,所以如何确定合理的轨道参数才能防止从航天器渐渐偏离主航天器,显得尤为重要。

假设编队航天器之间的最大距离为  $d$ ,且  $d$  远远小于航天器自身的地心距  $r$ ,即  $d \ll r$ 。因为  $z$  方向的相对运动是周期性的振荡运动,不会导致编队航天器的离散,所以只考虑含有时间线性项  $\Delta M$  的  $x$  和  $y$  方向相对运动,有

$$\frac{|x|}{r_c} = \left| \frac{1}{a_c} \cdot \Delta a - \frac{a_c}{r_c} \cos f_c \cdot \Delta e + \frac{a_c e_c}{r_c \sqrt{1 - e_c^2}} \sin f_c \cdot \Delta M \right| \leq \frac{d}{r_c} \ll 1 \quad (6)$$

$$\frac{|y|}{r_c} = \left| \frac{\sin f_c}{1 - e_c^2} (2 + e_c \cos f_c) \cdot \Delta e + \cos i_c \cdot \Delta\Omega + \Delta\omega + \left( \frac{a_c}{r_c} \right)^2 \sqrt{1 - e_c^2} \cdot \Delta M \right| \leq \frac{d}{r_c} \ll 1 \quad (7)$$

因为在不考虑摄动力和主动控制的条件下,  $\Delta a$ 、 $\Delta e$ 、 $\Delta\Omega$  和  $\Delta\omega$  都不会随时间改变,而且包含这些项的系数或为常数,或为与主航天器周期相同的周期函数,所以它们始终保持小量。要保证式(6)和(7)成立,必然要求  $\Delta M$  不含长期项,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta M}{t} = 0$  是实现长期近距离编队的必要条件。已知主从航天器的平近点角之差为  $\Delta M(t) = (n_d - n_c) \Delta t + \Delta M_0$ ,若  $n_d \neq n_c$ ,该项会随时间无限增大,致使从航天器在  $x$  和  $y$  方向逐渐偏离主航天器,相反,在  $n_d = n_c$  时  $\Delta M(t) = \Delta M_0$ ,且满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta M}{t} = n_d - n_c = 0$ ,可以保证  $\Delta M$  始终为小量。

简言之,主从航天器的半长轴严格相等( $a_d = a_c$ )或轨道周期相等( $n_d = n_c$ ),是椭圆轨道上两航天器实现长期近距离编队的必要条件。

## 2 相对运动特性分析

### 2.1 模型误差分析

大椭圆轨道的编队运动方程(3)和(4)是经过线性化简得到的近似方程。一般编队的轨道设计任务都要求轨道运动模型满足一定精度,特别是大椭圆轨道编队的相对位置和速度随时间变化剧烈,因此对轨道模型提出了更高要求。

按照表1所示轨道根数计算近似模型的误差及其与从航天器相对轨道根数间的关系。其中,从航天器轨道根数的偏移量都满足相对距离最大值为3km的条件。一个轨道周期的仿真结果如图2和3所示。对于相对位置误差曲线,  $\Delta\omega$  和  $\Delta M_0$  几乎不影响  $y$  方向位置误差,且只有  $\Delta\Omega$  对  $z$  方向的相对运动误差起作用; $x$  方向最大位置误差由  $\Delta M_0$  引起,其次是  $\Delta i$ ;  $y$  方向最大误差由  $\Delta i$  形成。相对位置误差的极大值小于0.5m,且它与相对距离极大值的比值和相对轨道根数处于同一量级。对于相对速度误差曲线,  $y$  方向位置误差基本不受  $\Delta\omega$  的影响,且  $z$  方向的相对运动误差只有  $\Delta\Omega$  起作用; $x$  方向最大相对速度误差由  $\Delta i$  引起,其次是  $\Delta M_0$ ;  $y$  方向最大误差由  $\Delta M_0$  形成。相对速度误差的极大值小于0.6mm/s。因此,选择相对较小的  $\Delta i$ 、 $\Delta\Omega$  和  $\Delta M_0$ ,可以有效降低大椭圆相对运动模型的误差。另外,在半个周期附近,无论是相对位置还是速度的误差,都趋于极小值,所以当编队轨道对远地点有特殊要求时,可以利用相对运动的这一重要特性提高轨道模型精度。

表1 主从航天器的轨道根数

Tab.1 Orbit elements of the chief spacecraft and slave spacecrafts

	$a/\text{km}$	$e$	$i/\text{rad}$	$\Omega/\text{rad}$	$\omega/\text{rad}$	$M_0/\text{rad}$
主航天器	13 800	0.5	$\pi/6$	0	0	0
从航天器 1	0	0.000 103	0	0	0	0
从航天器 2	0	0	0.000 251	0	0	0
从航天器 3	0	0	0	0.000 145	0	0
从航天器 4	0	0	0	0	0.000 145	0
从航天器 5	0	0	0	0	0	0.000 125

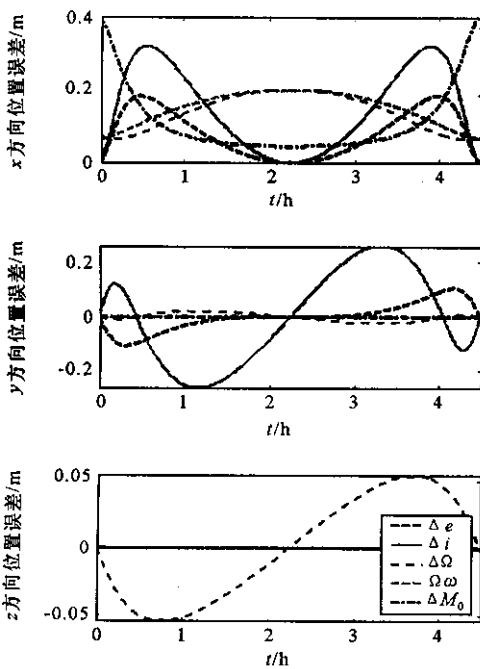


图2 相对轨道根数对相对位置模型精度的影响

Fig.2 Influence of orbit element differences on the accuracy of relative position

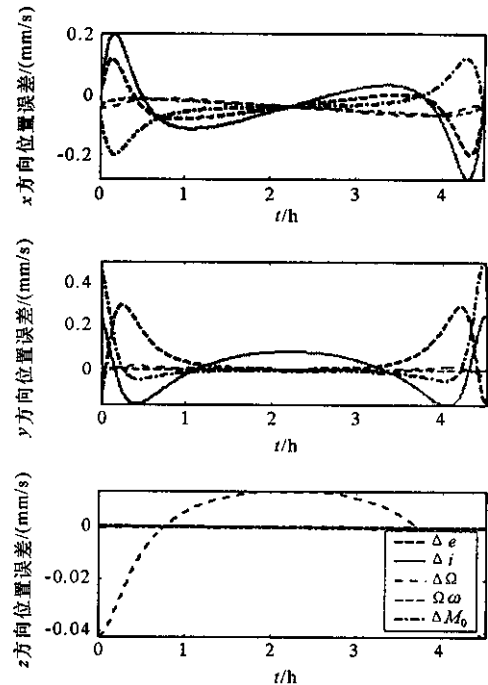


图3 相对轨道根数对相对速度模型精度的影响

Fig.3 Influence of orbit element differences on the accuracy of relative velocity

进一步仿真表明,当主从航天器的相对距离极大值为 30km 时,相对位置和相对速度误差都提高了两个数量级。所以,进行编队任务设计时,选择合适的编队距离及适当选取相对轨道根数,可将模型误差控制在要求的误差内。

## 2.2 相对轨迹特性

相对于圆轨道编队来说,椭圆轨道编队相对轨迹大多不在同轨道面内,但更具一般性。根据表 1 所示的主从航天器轨道根数,对空间相对轨迹、相对速度变化及其与从航天器相对轨道根数间的关系进行仿真,结果如图 4 和 5 所示。从两图的曲线可以看出,大椭圆轨道航天器的相对运动轨迹呈现出多样性(如卵形、圆形、直线)轨道根数偏差交互作用形成各种变体形状。 $\Delta e$  和  $\Delta i$  分别对  $x$  和  $z$  方向的相对位置影响最大,而  $y$  方向的相对位置由除  $\Delta i$  以外的相对轨道根数共同控制。对于相对速度曲线来说, $\Delta M_0$ 、 $\Delta e$  和  $\Delta i$  分别对  $x$ 、 $y$  和  $z$  三个方向的速度偏移量产生最大作用。

根据相对运动方程还可以推出,进行编队轨道设计时,轨道偏心率和轨道倾角的偏移量将使相对运动轨迹呈现出以主航天器为几何中心的绕飞趋势,而升交点赤经、近地点角和平近点角初值的偏移量将会使相对运动在  $y$  或  $z$  方向偏离主航天器,形成非绕飞轨道;当后三者符号一致时,对从航天器的  $y$  轴

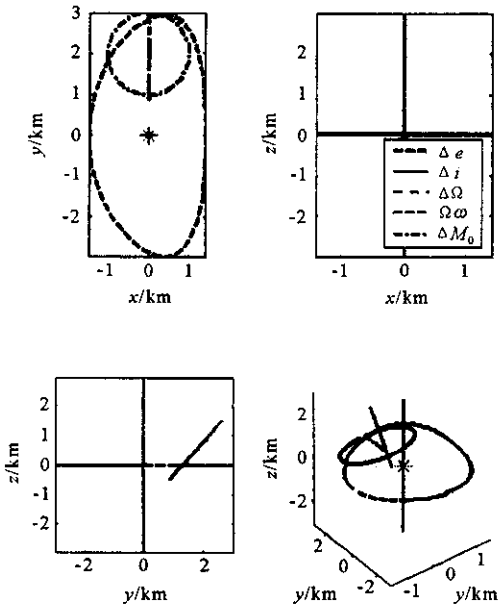


图4 5个从航天器的相对轨迹及其投影示意图

Fig.4 Relative trajectories and projections of the five deputy spacecrafts

偏离方向影响一致,使得偏离量发生累积。

### 3 结论

提出了一种理想二体条件下大椭圆轨道航天器编队的相对运动模型,它在轨道远地点处精度较高。选择相对较小的  $\Delta i$ 、 $\Delta \Omega$  和  $\Delta M_0$ ,可以有效降低该相对运动模型的误差。当进行编队轨道设计时,  $\Delta e$  和  $\Delta i$  将使相对运动轨迹呈现出以主航天器为几何中心的绕飞趋势,而  $\Delta \Omega$ 、 $\Delta \omega$  和  $\Delta M_0$  的偏移量将会使相对运动在  $y$  和  $z$  方向偏离于主航天器,形成非绕飞轨道;当三者符号一致时,  $y$  方向的偏离量会逐渐累积,符号相反的偏离量将会有所抵消。因此,适当选择相对轨道根数可设计出满足任务要求的编队轨道。

### 参考文献:

- [1] Natsume K, Saiki T, Kawaguchi J. On the Formation Flying with Frozen Geometry in Elliptic Orbits with Application to Geomagnetic Plasma Physics Missions [A]. 52nd International Astronautical Congress [C], 1-5, October 2001, Toulouse, France.
- [2] 高云峰, 宝音贺西, 等. 卫星编队飞行的动力学特性与相对轨道构形仿真 [J]. 清华大学学报(自然科学版) 44(4): 458-461, 2002.
- [3] 杨维廉. 椭圆轨道编队飞行轨道分析 [J]. 中国空间科学技术, 2001(5): 1-6.
- [4] 韦娟, 袁建平. 小卫星编队飞行的相对运动学方程研究 [J]. 飞行力学, 20(1): 29-32, 2002.
- [5] His-Han Yeh, Andrew Sparks. Geometry and Control of Satellite Formations [A]. Proceedings of the American Control Conference [C], Chicago, Illinois, June 2000, 384-388.
- [6] Inalhan G, Jonathan P. How. Relative Dynamics & Control of Spacecraft Formations in Eccentric Orbits [A]. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 14-17, August 2000, Denver.
- [7] Alfriend K T, Schaub H, Dong-Woo Gim. Gravitational Perturbations, Nonlinearity and Circular Orbit Assumption Effects on Formation Flying Control Strategies [A]. AAS Guidance and Control Conference, Breckenridge, CO, February 2000, Paper No. AAS 00-012.
- [8] 刘林. 航天器轨道理论 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

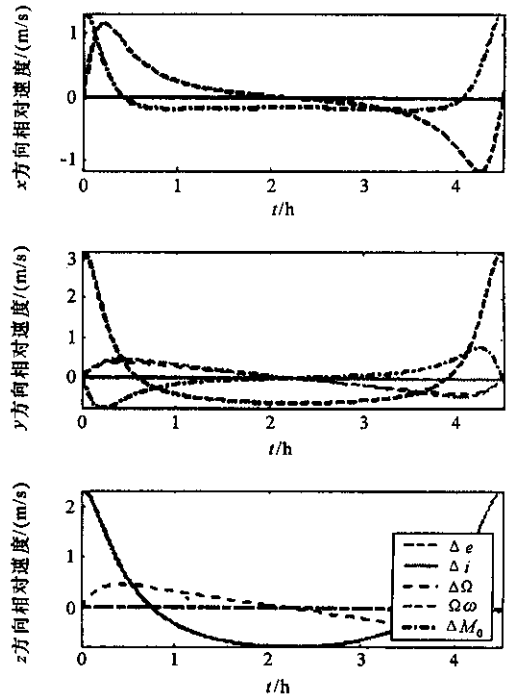


图5 5个从航天器的相对速度变化曲线

Fig.5 Relative velocities of the five deputy spacecrafts



