

无限大导体平面上凹槽散射的快速多极子分析*

徐利军,林宝勤,袁乃昌

(国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘要 :采用快速多极子方法计算无限大导体平面上凹槽的雷达散射截面。由电磁场等效原理导出无限大导体平面上凹槽的等效电流和磁流组成的耦合积分方程,用共轭梯度法和电流迭代的方法求解此耦合积分方程,在迭代的过程中用快速多极子方法加快矩阵和向量之间的运算,快速多极子方法的引入使计算量和内存需求都由 $O(N^2)$ 下降到 $O(N^{1.5})$ 。给出了算例,计算结果表明本文算法所得的结果与 MOM 的结果完全相符。

关键词 :快速多极子;凹槽;雷达散射截面

中图分类号 :TN011 文献标识码 :A

The Fast Multipole Method for Electromagnetic Scattering of a Groove in a Perfectly Conducting Plane

XU Li-jun, LIN Bao-qin, YUAN Nai-chang

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :The fast multipole method is applied for calculating the radar cross section of a groove in a perfectly conducting plane. The coupled integral equations for the induced currents of a groove in a perfect conducting plane are obtained in terms of equivalent principle, and solved by using CGM and current iteration method, FMM is employed to speed up the matrix-vector multiplication. After FMM acceleration, both the computing time and memory needs are reduced from $O(N^2)$ to $O(N^{1.5})$ without increasing the complexity of implementation. Some examples are calculated, the numerical results are in perfect agreement with the MOM result.

Key words :fast multipole method; Groove; RCS

在雷达目标的电磁散射研究中,对散射体表面凹槽的电磁散射研究非常重要,因为这种结构常常存在于散射体相邻的两个部件的连接处或表面的腔、空、缝等处,即使这种凹槽完全或部分填充有耗或无耗介质,它们仍对目标的整体散射方向图有重要的影响。目前,解决这类问题的方法很多,主要有积分方程法,如矩量法^[1]、有限元^[2]和解析近似法,其中矩量法由于能够精确预测任意形状导体散射场而受到重视,但是对于电大尺寸结构的这类问题,如果单采用传统的矩量法,存在内存占用过大,计算时间随未知数的增长太快等缺点。寻求占用内存少、能快速和准确求解复杂目标的散射问题的方法是目前研究的重要课题。

快速多极子方法(FMM)^[3]是美国耶鲁大学数学家 Rokhlin 等人在 20 世纪 80 年代中期提出的一种求解积分方程的快速算法。该算法最早用来分析大量电荷的静电场和大量天体的引力场。Chew(周永祖)^[4]领导的研究小组迅速将其应用到电磁散射领域。快速多极子算法首先将求解区域按通常的矩量法离散化,然后将彼此相近的散射单元分成若干组。每个组内或相邻组的单元间的相互作用仍然采用矩量法的计算方式,而远区组单元间的相互作用通过聚合、传递和解聚三个过程计算。由于区分了近场和远场单元之间相互作用的计算,因而大大减少了计算量。最后采用共轭梯度方法求得积分方程的解,分析表明该方法的运算量和存储量为 $N^{1.5}$ 量级。

* 收稿日期 2004-10-11

作者简介:徐利军(1977—),男,博士生。

1 原理

无限大导体平面上任意形状凹槽的结构如图 1 所示, 无限大导体平面位于 $y = 0$ 平面上, 在此平面上有一缝 A , 其位置为: $-w/2 < x < w/2$, 此缝为凹槽 S 的出口, 凹槽壁也为导体, 而凹槽内填充各向同性介质, 其相对介电常数和导磁率分别为 μ_r, ϵ_r 。在此二维问题中, TM 和 TE 的求解过程相似, 本文只考虑 TE 波入射的情况, 入射波可表示为下式:

$$\mathbf{H}^i = \hat{z} \exp[jk_0(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)] \quad (1)$$

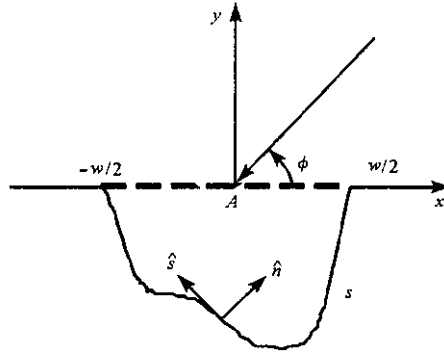


图 1 凹槽的结构示意图

Fig.1 Structure of a groove in a perfectly conducting plane

这里 k_0 为自由空间的波数, ϕ_0 为入射角。根据电磁场等效原理, 若将凹槽口径用理想导体封闭, 可将原问题等效为外部问题和内部问题, 由文献 [5] 可知, 感应磁流 $\mathbf{M} (= \hat{z} M_z)$ 只存在于凹槽口径上, 而感应电流 $\mathbf{J}(s) = \hat{s} J_s(s)$ 既存在于凹槽口径上, 又存在于腔壁上。它们的耦合方程由下两式确定:

$$J_s(s) = \frac{k_0}{2\eta_0} \epsilon_r \int_{-w/2}^{w/2} M_z(x') H_0^2 [k \sqrt{(x-x')^2 + y^2}] dx' - \frac{j}{2} \int_{S+A} J(s') \hat{n} \cdot \nabla H_0^2 [k \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}] ds' \quad (2)$$

$$J_s(x) = 2 \exp(jk_0 x \cos \phi_0) - \frac{k_0}{2\eta_0} \int_{-w/2}^{w/2} M_z(x') H_0^2(k_0 |x-x'|) dx' \quad (3)$$

式中, $k = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ 为凹槽内的波数, η_0 为自由空间波阻抗, 使用矩量法 (MOM) 数值求解积分方程 (2) 和 (3), 边界 $S+A$ 被离散为 N 段小单元, 其中口径 A 分为 N_a 份。未知电流和磁流用分段脉冲函数展开, 然后用点匹配, 可得方程:

$$J_j = \sum_{i=1}^{N_a} Y_{ji}^{ab} \cdot M_i + \sum_{i=1}^N Y_{ji}^a \cdot J_i \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

$$J_j = V_j - \sum_{i=1}^{N_a} Y_{ji}^b \cdot M_i \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_a \quad (5)$$

其中:

$$Y_{ji}^{ab} = \frac{k_0 \epsilon_r}{2\eta_0} \int_{\Delta_i} H_0^2 [k \sqrt{(x_j - x')^2 + y_j^2}] dx', \quad Y_{ji}^a = \frac{-j}{2} \hat{n} \cdot \nabla \int_{\Delta_i} H_0^2 [k \sqrt{(x_j - x')^2 + (y_j - y')^2}] ds'$$

$$Y_{ji}^b = \frac{k_0}{2\eta_0} \int_{\Delta_i} H_0^2(k_0 |x_j - x'|) dx', \quad V_j = 2 \exp(jk_0 x_j \cos \phi_0)$$

2 快速多极子方法

耦合方程 (4) 和 (5) 的迭代求解需要重复计算每个电流段和磁流段在其他段上的辐射, 导致 $O(N^2)$ 的计算量, 快速多极子法对此进行了改进, 计算量和存储量都下降到 $O(N^{1.5})$ 。

应用快速多极子法,把离散得到的 N 小段分成尺寸大体相等的 G 组,每组有 M 个小段。定义第 l' 个组为 $G_{l'}$,中心为 l' 。对于 $G_{l'}$,定义其近区组和远区组分别为 $NG_{l'}$ 和 $FG_{l'}$ 。同一组内和相邻两组内电流段之间的辐射仍然采用普通的矩量法计算,而对其他组采用多极子展开。设 ρ_j 和 ρ_i 分别为场点和源点,则有:

$$\rho_{ji} = \rho_j - \rho_i = \rho_j - \rho_{l'} + \rho_{l'} - \rho_l + \rho_l - \rho_i = \rho_{jl'} + \rho_{l'l} + \rho_{li} \quad (6)$$

根据柱函数加法定理以及 Bessel 积分表达式可得^[6]:

$$H_0^2 \chi(k\rho_{ji}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \bar{\beta}_{jl'}(\alpha) \bar{\alpha}_{l'l}(\alpha) \bar{\beta}_{li}(\alpha) \quad (7)$$

其中:

$$\bar{\alpha}_{l'l}(\alpha) = \sum_{r=-p}^p H_r^2 \chi(k\rho_{ji}) \exp[-jr(\phi_{l'l} - \alpha - \pi/2)] \quad (8)$$

$$\bar{\beta}_{jl'}(\alpha) = \exp[jk\rho_{jl'} \cos(\alpha - \phi_{jl'})] \quad (9)$$

$$\bar{\beta}_{li}(\alpha) = \exp[jk\rho_{li} \cos(\alpha - \phi_{li})] \quad (10)$$

将式(7)的积分转化为求和,则有:

$$\sum_{i=1}^N Y_{ji}^a \cdot J_i = \sum_{i \in NG_{l'}} \sum_{i \in G_l} Y_{ji}^a J_i + \sum_{q=1}^Q \frac{k_0 \eta_0}{4Q} \bar{\beta}_{jl'}(\alpha_q) \sum_{\substack{l=1 \\ G_l \neq NG_{l'}}}^G \bar{\alpha}_{l'l}(\alpha_q) \sum_{i \in G_l} \bar{\beta}_{li}(\alpha_q) \Delta l_i J_i \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{ji}^a \cdot J_i = (Y_{NN}^a + Y_{FF}^a) J \quad (12)$$

其中, Y_{NN}^a 为近区作用矩阵; Y_{FF}^a 为远区作用矩阵,且可分解为源点组的组内聚合、源点组与场点组组间的转化和场点组组内配置三个稀疏矩阵。同样有:

$$\sum_{i=1}^{N_a} Y_{ji}^b \cdot M_i = (Y_{NN}^b + Y_{FF}^b) M \quad (13)$$

这样,式(4)和(5)可以重写为:

$$J = (Y_{NN}^{ab} + Y_{FF}^{ab}) M + (Y_{NN}^a + Y_{FF}^a) J \quad (14)$$

$$J = V - (Y_{NN}^b + Y_{FF}^b) M \quad (15)$$

对于式(14)和(15),可以采用迭代的方式求出其解,即对 J 和 M ,先假设一初值,并代入到(14)式中,把迭代后得出的 J 代入到式(15)中,在(15)式中把 J 和 V 看成常数,用共轭梯度方法求出 M ,再把求出的 M 和上次迭代求出的 J 代入式(14),这样反复迭代即可得到 J 、 V 的近似值。

在得到了口径上的磁流 M 后,就可以得到缝的远区散射场^[5]:

$$H^s = \hat{z} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 \rho}} e^{j(k_0 \rho - \pi/4)} P_H(\phi, \phi_0) \quad (16)$$

其中, $P_H(\phi, \phi_0)$ 为由感应磁流确定的方向性函数,且

$$P_H(\phi, \phi_0) = -\frac{k_0}{2\eta_0} \int_{-w/2}^{w/2} M_z(x') e^{jk_0 x' \cos \phi} dx' \quad (17)$$

3 计算结果

为了验证本文方法的有效性,我们开发出相应的计算机分析程序并进行了数值对比研究。

首先用 FMM 法对无限大平面上的方槽的 RCS 进行了数值计算,并与 MOM 法的结果进行了比较,如图 2 所示,两者的计算结果完全相符(此方槽的口径宽度为 45λ ,深为 0.5λ ,槽内填充的介质的参数 $\epsilon_r = 4$)。

其次,用 FMM 法对无限大平面上的三角槽的 RCS 进行了数值计算,并与 MOM 法的结果进行了比较,如图 3 所示,两者的计算结果基本相符(此三角槽的口径宽度为 50λ ,高为 0.5λ ,槽内填充的介质的参数 $\epsilon_r = 4$)。

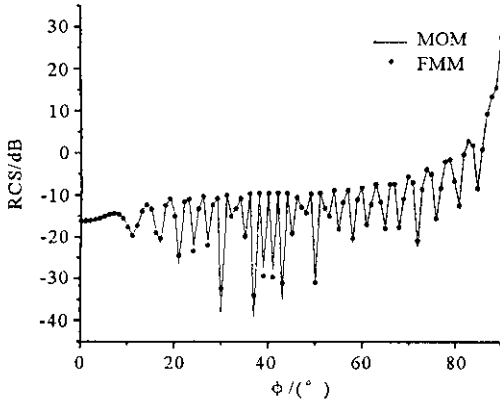


图2 无限大导体平面上方槽的 RCS

Fig.2 RCS of the rectangular groove in a conducting plane

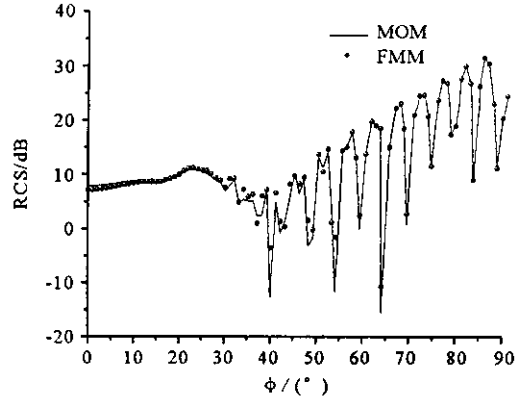


图3 无限大导体平面上三角槽的 RCS

Fig.3 RCS of the triangular groove in a conducting plane

4 结论

快速多极子方法是加速电磁散射中积分方程迭代求解的一种稳定而有效的方法。本文采用快速多极子方法(FMM)求解无限大导体平面上凹槽的雷达散射截面,即用共轭梯度法和电流迭代的方法求解由无限大导体平面上凹槽的等效电流和等效磁流所组成的耦合积分方程,在迭代的过程中用快速多极子方法加快矩阵和向量之间的运算,快速多极子方法的引入使计算量和内存需求都由 $O(N^2)$ 下降到 $O(N^{1.5})$ 。两个算例的计算结果表明使用本文的算法所得的结果与 MOM 法的结果相符。

参考文献:

- [1] Bindiganavale S S, Volakis J L. Scattering by a Narrow Groove in an Impedance Plane[J]. Radio Science, 1996, 31(2):401-408.
- [2] Ramahi O M, Mittra R. Finite Element Solution for a Class of Unbounded Geometries[J]. IEEE Tran. 1991, 39(2):244-250.
- [3] Rokhlin V. Rapid Solution of Integral Equation of Classical Potential Theory[J]. J. Comp. Phys., 1985, 60(2):187-207.
- [4] Chew W C. An N^2 Algorithm for the Multipole Scattering Solution of N Scatterers[J]. Microw. Opt. Technol. Lett., 1989, 2(1):380-383.
- [5] Senior T B A, Sarabandi K, Natzke J R. Scattering by a Narrow Gap[J]. IEEE Tran. AP, 1990, 38(7):1102-1110.
- [6] Chew W C. 非均匀介质中的场与波[M]. 聂在平, 柳清伙, 译. 北京: 电子工业出版社, 1992.
- [7] Harrington R F. 计算电磁场的矩量法[M]. 王尔杰, 等译. 北京: 国防工业出版社, 1981.
- [8] 熊洪允, 曾绍标, 毛云英. 应用数学基础[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994.

