

# 基于反馈线性化的 EMS 型磁浮列车非线性悬浮控制器设计\*

刘德生 李 杰 张 镔

(国防科技大学 机电工程与自动化学院 湖南 长沙 410073)

**摘要** 悬浮系统控制技术是 EMS 型磁浮列车的关键技术之一。针对悬浮系统的非线性特征,设计了一种非线性悬浮控制器。在合理假设的基础上,建立了 EMS 型磁浮列车悬浮系统的非线性数学模型,通过反馈线性化将该非线性模型精确线性化,得到等价的线性模型,采用状态反馈的方法设计了非线性控制器。仿真结果表明,该非线性控制器的控制性能明显优于传统的局部近似线性化方法设计的控制器,对间隙干扰和负载干扰具有鲁棒性。

**关键词** 非线性;悬浮控制器;反馈线性化;仿真

中图分类号:TP13 文献标识码:A

## The Design of the Nonlinear Suspension Controller for EMS Maglev Train Based on Feedback Linearization

LIU De-sheng, LI Jie, ZHANG Kun

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** The technology of magnetic suspension control is one of the key technologies of EMS maglev train. Aiming at the nonlinearity of the magnetic suspension system, a nonlinear controller was designed. Firstly a nonlinear mathematical model of the magnetic suspension system was derived under some reasonable assumptions. Then the model was linearized exactly by means of feedback linearization, and an equivalent linear model was developed. Finally the design of a nonlinear suspension controller was presented using state feedback based on the linear model. Results of the simulation show that the controller works better than the traditional controller based on the local approximate linearization, and has robustness against the disturbance of the gap and load.

**Key words** nonlinear; suspension controller; feedback linearization; simulation

磁浮列车是一种新型的轨道交通工具,相对轮轨交通而言,具有噪声小、无污染、安全舒适等优点。它是依靠电磁力对车体进行悬浮和导向,利用直线电机牵引列车进退。根据电磁力产生的方式不同,目前磁浮列车的悬浮系统主要分为超导电动悬浮(EDS)型和常导电磁悬浮(EMS)型。EDS型悬浮属于自稳定系统,无需主动悬浮控制,而EMS型悬浮系统利用电磁铁与导轨之间的吸力将列车向上拉起,使其以一定的间隙悬浮于轨道上,系统本身是不稳定的,必须实施主动悬浮控制。因此悬浮系统的控制技术是EMS型磁浮列车的关键技术之一。

磁悬浮系统是典型的非线性系统,通常采用在平衡点泰勒级数展开的方法对系统模型进行线性化处理,然后进行控制器设计<sup>[1]</sup>,但这种方法设计的控制器只在平衡点附近才有比较好的控制性能。反馈线性化方法是一种常用的精确线性化方法,它通过对状态变量或输出变量的非线性反馈,得到一个与原来的非线性系统等价的线性系统模型。这是一种全局线性化方法,克服了前一种方法的缺点,使得设计的控制器具有更好的鲁棒性,在控制领域中应用十分广泛。

### 1 悬浮系统模型的建立

EMS型中低速磁悬浮列车通常采用模块化的转向架结构<sup>[2]</sup>,通过机械解耦,使得转向架的每一对电

\* 收稿日期 2004-09-07

基金项目 国家十五 863 高速磁浮交通技术重大专项支持项目,国家自然科学基金资助项目(60404003),霍英东教育基金优选资助课题(94028),湖南省自然科学基金资助项目(03JJY3108)

作者简介 刘德生(1976—)男,博士生。

磁铁都具有独立的控制自由度 磁悬浮列车的悬浮控制问题可以简化为单个电磁铁的悬浮问题。

图 1 是一个简化以后的单铁—导轨悬浮系统的物理模型。假设轨道相对电磁铁而言具有无穷大的刚度系数,只考虑电磁铁相对轨道的运动关系,而不考虑轨道本身的弹性振动和机械形变对系统模型的影响。

对系统中的物理量和参数作如下约定: $\phi_T$  为主磁通, $\phi_m$  为气隙磁通, $\phi_L$  为漏磁通; $S$  为铁芯极面积, $N$  为电磁铁绕组匝数; $i(t)$  为控制线圈电流,简记为  $i$ ; $u(t)$  为控制线圈两端电压; $\delta(t)$  为单铁与导轨之间的间隙,简记为  $\delta$ ; $\mu_0$  为真空中磁导率( $4\pi \times 10^{-7}$  H/m), $g$  为重力加速度( $9.8\text{m/s}^2$ );同时假设<sup>[3,4]</sup>:

- (1)忽略绕组漏磁通,即  $\phi_L = 0$ ;
- (2)忽略铁芯和导轨中的磁阻,即认为磁势均匀降在气隙  $\delta$  上。

基于上述约定与假设,单电磁铁悬浮系统(垂直自由度)的动力学可由下面方程完全确定:

电磁力方程:

$$F(i, \delta) = \mu_0 SN^2 i^2 / (4\delta^2) \tag{1}$$

运动方程:

$$m\ddot{\delta} = -F(i, \delta) + mg + f_d(t) \tag{2}$$

电学方程:

$$u(t) = Ri + \mu_0 SN^2 i / (2\delta) - \mu_0 SN^2 i \dot{\delta} / (2\delta^2) \tag{3}$$

选择  $x = [x_1, x_2, x_3]^T = [\delta, \dot{\delta}, i]^T$  并作为系统状态变量,可以得到系统的非线性状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_0 SN^2 x_3^2 / (4mx_1^2) + g + f_d/m \\ \dot{x}_3 = x_2 x_3 / x_1 - 2Rx_1 x_3 / \mu_0 SN^2 + 2x_1 u(t) / \mu_0 SN^2 \end{cases} \tag{4}$$

设  $K = \mu_0 SN^2 / 4$ , 则状态空间方程可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + u(t) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{5}$$

其中  $f(x) = \begin{bmatrix} x \\ -Kx_3^2 / mx_1^2 + g \\ x_2 x_3 / x_1 - Rx_1 x_3 / 2K \end{bmatrix}$ ,  $g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 / 2K \end{bmatrix}$ ,  $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \\ 0 \end{bmatrix} f_d$ ,  $h(x) = x_1$ ,  $u = u(t)$

系统的开环结构图如图 2 所示。

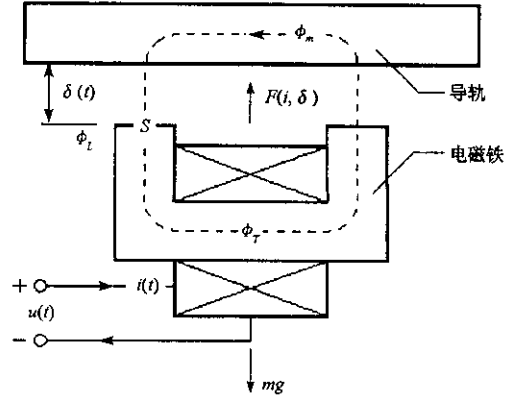


图 1 单铁—导轨悬浮系统简化模型  
Fig. 1 Predigested model of single magnet-rail

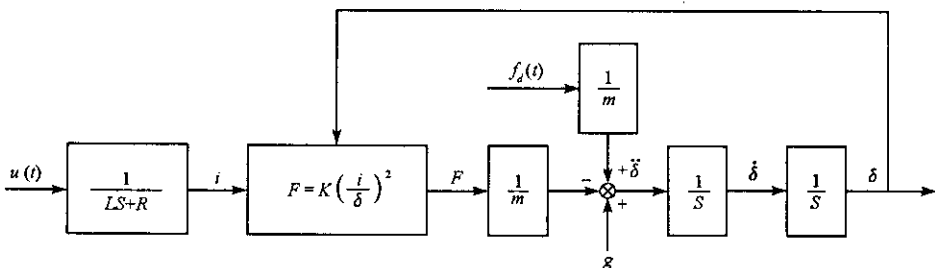


图 2 非线性模型的开环结构图

Fig. 2 Diagram of open nonlinear model

## 2 反馈线性化

### 2.1 基本原理和方法

对于仿射非线性系统<sup>5,6]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + u(t) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (6)$$

给定  $x_0 \in X$ , 存在  $x_0$  的一个邻域  $V$ , 如果在给定点  $x_0$  具有相对阶  $r = n$ , 其中,  $r$  满足:

$$(a) L_g L_f^k h(x) = 0; \forall x \in V, 0 \leq k \leq r-2 \quad (b) L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0, \forall x \in V$$

则有反馈控制  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , 以及一个同胚映射

$$z = \Phi(x) = [h(x) \quad L_f h(x) \quad \dots \quad L_f^{n-1} h(x)]^T \quad (7)$$

使得反馈系统  $\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v$  在新坐标  $z$  下变成一个完全的线性系统

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bv \\ y = Cz \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{其中 } \alpha(x) = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)}, \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}, A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

### 2.2 悬浮系统的反馈线性化

为了便于工程实现, 采用位置环—电流环串级控制的方法, 假设电流环足够快, 以电流为控制对象。选取  $x = [x_1 \quad x_2]^T = [\delta \quad \dot{\delta}]^T$  为状态变量, 则系统的非线性状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + w \\ y = h(x) \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{其中 } f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -K/mx_1^2 \end{bmatrix}, u = i^2, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f_d, h(x) = x_1.$$

考虑到

$$L_g L_f^0 h(x) = 0, L_g L_f h(x) = -K/mx_1^2 \neq 0$$

则系统在给定点  $x_0$  具有相对阶 2, 反馈线性化有解。反馈控制  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , 其中

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^2 h(x)}{L_g L_f h(x)} = \frac{mgx_1^2}{K}, \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f h(x)} = -\frac{mx_1^2}{K}$$

同胚映射

$$z = \Phi(x) = [h(x) \quad L_f h(x)]^T = [x_1 \quad x_2]^T$$

综上所述, 线性化后的磁悬浮线性模型为

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y = [1 \quad 0]z \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} z = [z_1 \quad z_2]^T = [x_1 \quad x_2]^T = [\delta \quad \dot{\delta}]^T \\ v = g - Ki^2/mx_1^2 \end{cases} \quad (11)$$

线性化后, 系统开环传递函数

$$G(s) = y(s)/v(s) = 1/s^2 \quad (12)$$

系统结构如图 3 所示。

## 3 控制器的设计

系统(10)的可控性矩阵

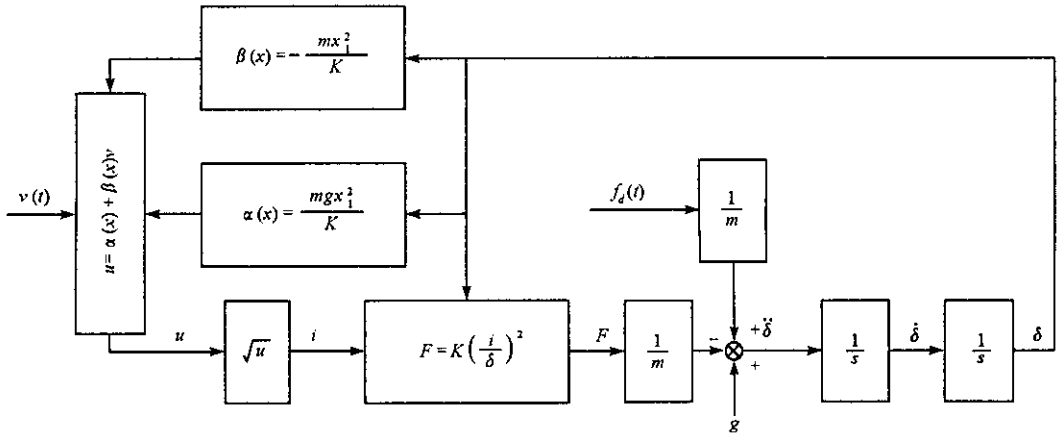


图 3 反馈线性化后的系统结构图

Fig.3 Diagram of system after feedback linearization

$$M = [ \begin{matrix} B & AB \end{matrix} ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

因为  $\text{rank}(M) = 2$  所以线性化后的系统完全可控,可以通过任意配置极点的方式设计控制器,使闭环系统的性能满足要求。

由式(11)得到电流的控制律为  $i = \delta \sqrt{m(g - v)/K}$ ,下面采用状态反馈—输入变换的方法,设计控制律  $v = Rv_c - K_T z$ ,使得闭环系统的动态指标满足(1)输出超调量  $\sigma \leq 5\%$  (2)峰值时间  $t_\sigma \leq 0.1s$ ; (3)静态位置误差  $e_p = 0$ 。其中  $K_T = [k_1 \ k_2]$ ,  $K_T$  为状态反馈增益矩阵,  $R$  为输入变换系数,  $v_c$  为给定的悬浮系统平衡间隙。

由性能指标可以解得

$$\begin{cases} \zeta \geq 0.707 \\ \omega_n \geq 45 \end{cases} \tag{14}$$

取  $\zeta = 0.707$ ,  $\omega_n = 50$ ,则期望极点为  $\lambda_{1,2} = -35.35 \pm j35.35$ 。通过极点配置的方法,可以求得反馈增益  $k_1 = 2500$ ,  $k_2 = 70.7$ 。

原系统开环无零点,反馈后的闭环传递函数为

$$G_f(s) = R/s^2 + 70.7s + 2500 \tag{15}$$

系统要求静态误差  $e_p = 0$ ,即静态放大系数为 1,有

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_f(s) = 1 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} R/s^2 + 70.7s + 2500 = 1 \Rightarrow R = 2500 \tag{16}$$

综上所述,有

$$v = 2500(v_c - x) - 70.7\dot{x} \tag{17}$$

状态反馈后的闭环系统结构图如图 4 所示。

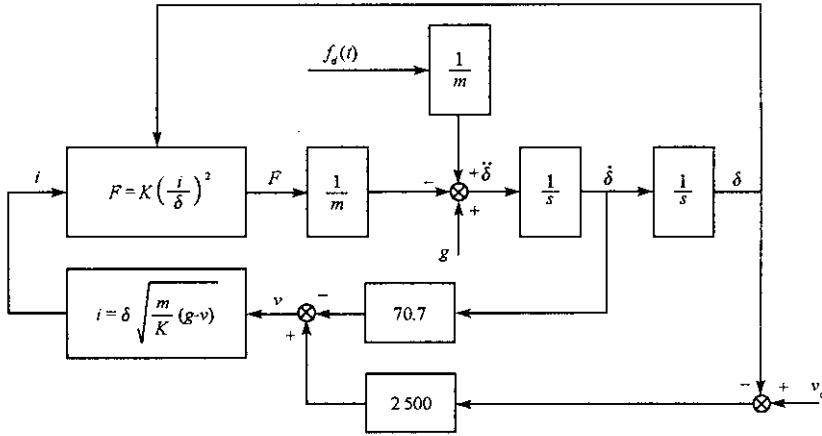


图4 以电流为控制对象的悬浮系统闭环结构图

Fig.4 Diagram of close loop suspension system

### 4 仿真与分析

仿真在 Matlab 环境下借助 Simulink 进行,仿真采用的单铁悬浮系统参数如表 1 所示。

表 1 单铁悬浮系统参数

Tab.1 Parameter of single magnet suspension system

质量(kg)	磁极面积(m <sup>2</sup> )	线圈匝数	线圈电阻(Ω)	稳态间隙(m)
134	0.84 × 0.028	324	0.52	0.008

系统的 Simulink 仿真模型如图 5 所示。其中的 EMS\_Model 模块是单铁系统的非线性模型,  $I(z, v)$  模块是电流的计算公式。对于基于平衡点展开设计的控制器(以下称之为控制器 1)而言,  $I(z, v)$  表示为  $i = i_0 + v$  其中  $i_0$  是平衡点对应的电流值;对于基于反馈线性化设计的控制器(以下称之为控制器 2)而言,  $I(z, v)$  表示为  $i = \delta \sqrt{m(g-v)/K}$ 。

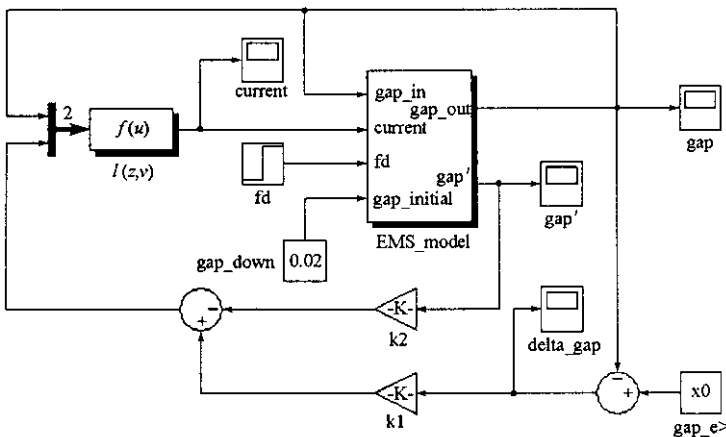
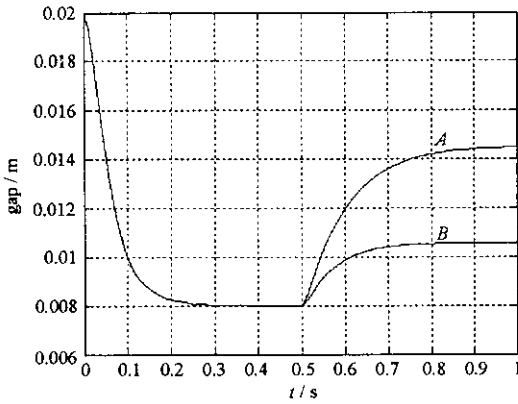


图5 Simulink 仿真框图

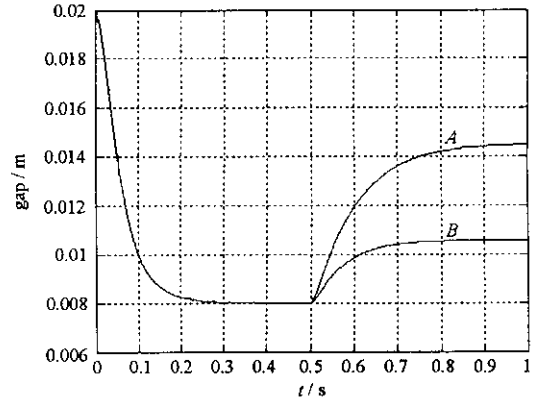
Fig.5 Simulation diagram in Simulink

图 6 和图 7 分别为两种控制器对单铁非线性模型的控制效果。仿真时间为 1s,在 0.5s 处加入一方向向下的阶跃干扰。曲线 A 是干扰幅值为  $mg$  时的情况,曲线 B 是干扰幅值为  $0.5mg$  时的情况。

由图 6 和图 7 可以看出,在平衡点附近,控制器 1 和控制器 2 的控制效果基本相同;当受到外界干扰而导致系统的工作点偏离设定的平衡点时,相对控制器 2 而言,控制器 1 控制的间隙和电流都发生了较大的变化,并且当干扰增大时,这种变化呈发散趋势,对单铁的非线性模型适应性很差。而控制器 2 则表现出良好的模型适应性和控制鲁棒性。



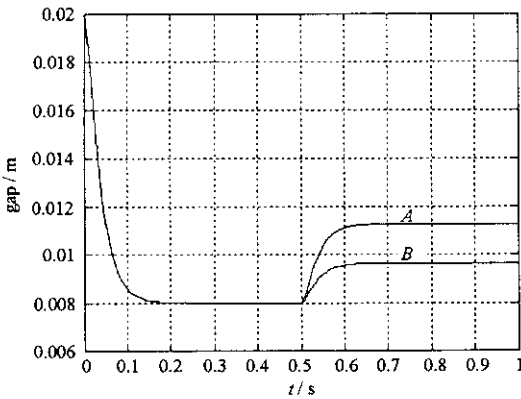
(a) 间隙波形  
(a) Waveform of air gap



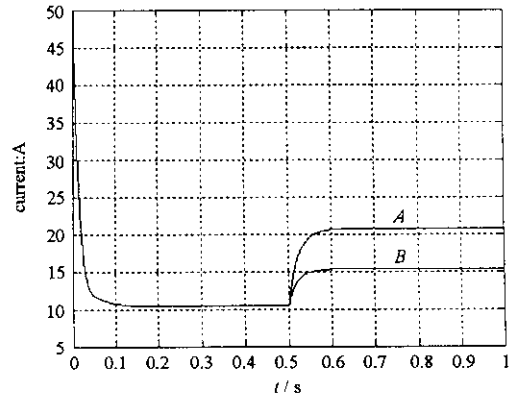
(b) 电流波形  
(b) Waveform of current

图 6 控制器 1 的控制效果

Fig.6 Control effect of controller 1



(a) 间隙波形  
(a) Waveform of air gap



(b) 电流波形  
(b) Waveform of current

图 7 控制器 2 的控制效果

Fig.7 Control effect of controller 2

## 5 结束语

反馈线性化方法作为一种精确线性化的方法,可以实现非线性系统的大范围线性化,它克服了常用的在平衡点泰勒展开线性化的缺点,线性化后的模型具有在输入—输出上呈线性关系,同时保留了系统内部的非线性特性,仿真结果表明,依据这种方法设计的非线性控制器具有很好的模型适应性和鲁棒性。

## 参考文献:

- [1] 龙志强,郝阿明,常文森.考虑轨道周期性不平顺的磁悬浮列车控制系统设计[J].国防科技大学学报,2003,25(2).
- [2] 李云钢,常文森.模块结构 EMS 型磁悬浮列车的导向控制研究[J].国防科技大学学报,1997,19(3).
- [3] Toru Namerikawa, Masayuki Fujita. Uncertainty Structure and  $\mu$ -Synthesis of a Magnetic Suspension System[J]. T. IEE Japan, 2001, 121-C(6), 1080-1087.
- [4] 商海波.磁悬浮数字控制方法及其实现[D].成都:西南交通大学,2002.
- [5] 曹建福,韩崇昭,方洋旺.非线性系统理论及应用[M].西安:西安交通大学出版社,2001.
- [6] Khalil H K. Robust Servomechanism Output Feedback Controllers for Feedback linearizable Systems[J]. Automatic, 1994, 30(10), 1587-1599.



