

分布信号源的 DOA 估计*

陈洪光,王世晔,沈振康

(国防科技大学 ATR 重点实验室,湖南长沙 410073)

摘要 :由于信号模型的偏差,传统的点目标假设下的 DOA 估计算法对分布信号源的估计误差较大,为此建立了分布信号源的模型,提出适用于分布源信号的 DIS-MUSIC 算法,并分析了该算法的估计性能。仿真结果表明,所提算法对分布信号源的 DOA 估计性能远优于 MUSIC 算法。

关键词 :DOA ;DIS-MUSIC ;分布信号源

中图分类号 :TN911 文献标识码 :A

Estimation of the Directions of Arrival of Distributed Sources in Array Processing

CHEN Hong-guang, WANG Shi-xi, SHEN Zhen-kang

(ATR Key Lab, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :Most of the existing methods of high resolution direction estimation rely on the assumption that the signals are from point sources. Thus, the application of the conventional estimation methods to the distributed sources will show grave deterioration in performance. A new model is constructed for the distributed sources, and an estimation method named DIS-MUSIC is proposed. The performance of this method is analyzed and computer simulation results show that DIS-MUSIC is of much better performance than MUSIC algorithm.

Key words :direction of arrival ;distributed-source-MUSIC ;distributed source

近年来,高分辨率的阵列信号处理技术备受关注,尤其是阵列测向技术,在地震探测、雷达、无源声纳、无线通信等诸多领域得到广泛应用,并形成了许多高分辨率估计算法。这些估计算法大多假设信号源是远场的点目标,点目标模型是实际环境的一种近似。由于目标的尺寸取决于与阵列接受天线的距离,加之多径效应、散射等现象的影响,无线移动通信中信号波达角常在一定范围内被展开,呈现出分布信号源(distributed source)的特性^[1,2]。此时,由于信号模型的偏差,传统的 DOA 估计算法误差较大。为此,本文在建立分布信号源模型的基础上,推导了一种基于特征值分解的分布信号源 DOA 估计算法 DIS-MUSIC,并对算法的估计性能进行了理论分析。论文最后对算法进行仿真,并与传统 MUSIC 算法进行了比较,结果表明,DIS-MUSIC 算法对分布信号源的 DOA 估计性能要优于 MUSIC 算法。

1 分布信号模型

考虑一个包含 M 个单元的均匀线性阵列(uniform linear array, ULA),阵元间距 D 为信号波长的一半。同一平面内,有 K 个互不相关的分布信号源照射到阵列上,信号波长用 λ 表示。线性阵列的输出矢量为:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^K a(\theta_i) s_i(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]$, $\mathbf{N}(t)$ 是 M 维阵列接收噪声矢量,其均值为零,方差阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}$, $s_i(t)$ 是第 i 个分布信号的幅度, $a(\theta_i)$ 是 ULA 的方向矢量:

* 收稿日期 2005-03-10
作者简介 陈洪光(1976—),男,博士生。

$$\mathbf{a}(\theta_i) = (1, e^{j\zeta_i}, e^{j2\zeta_i}, \dots, e^{j(M-1)\zeta_i})^T \quad (2)$$

$$\zeta_i = \frac{2\pi D}{\lambda} \cos(\theta_i) = \pi \cos(\theta_i) \quad (3)$$

若 $s_i(t)$ 是各态历经的,且在时域和空域上都互不相关,则输出矢量的 $M \times M$ 维相关矩阵为:

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \sum_{i=1}^K E[\mathbf{a}(\theta_i)\mathbf{a}^H(\theta_i)]R_i^s + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (4)$$

其中 R_i^s 是第 i 个信号的自相关函数。定义 $M \times M$ 维矩阵:

$$\mathbf{A}_i = E[\mathbf{a}(\theta_i)\mathbf{a}^H(\theta_i)] \quad (5)$$

由于信号源不再是点目标,每个分布信号的波达角都是一个随机变量。假定第 i 个信号的波达角 θ_i 在 ϑ_i 范围内的概率密度函数为 $p(\theta_i, \boldsymbol{\gamma}_i)$,其中 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 是描述分布函数 $p(\theta_i, \boldsymbol{\gamma}_i)$ 的参数矢量。通常情况下 θ_i 服从均匀分布或高斯分布,假设 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 是两维的, $\boldsymbol{\gamma}_i = (\bar{\theta}_i, \sigma_i)$,其中 $\bar{\theta}_i$ 表示均值,均匀分布中 σ_i 表示扩展范围,高斯分布中表示方差。由此(5)式可以写成:

$$\mathbf{A}_i = \int_{\theta_i \in \vartheta_i} \mathbf{a}(\theta_i)\mathbf{a}^H(\theta_i)p(\theta_i, \boldsymbol{\gamma}_i) d\theta_i \quad (6)$$

由式(2)可得到矩阵 \mathbf{A}_i 的第 (m, n) 个元素为:

$$a_{m,n} = \int_{\theta \in \vartheta_i} e^{j(m-n)\zeta_i} p(\theta_i, \boldsymbol{\gamma}_i) d\theta \quad (7)$$

例如均匀分布 $p(\theta_i, \boldsymbol{\gamma}_i) = \frac{1}{2\sigma_i} (-\sigma_i < \theta_i - \bar{\theta}_i < \sigma_i)$, 则

$$a_{m,n} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^p J_p[\pi(m-n)] \frac{\sin(p\sigma_i)}{p\sigma_i} e^{jp\bar{\theta}_i} \quad (8)$$

其中 $J_p(\cdot)$ 是第一类 Bessel 函数。

2 DOA 估计及其性能分析

显然,分布信号源的 DOA 估计变成了参数 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 的估计。以上节构造的线性阵列中分布信号源的数学模型为基础,应用子空间技术进行估计,首先要获得输出矢量的相关矩阵的估计,假定快照数为 N , 则

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t) \quad (9)$$

对相关矩阵进行特征值分解:

$$\hat{\mathbf{R}}_x \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (10)$$

其中 λ_i 是特征值, \mathbf{u}_i 为对应的特征向量。假定信号数目 K 事先已经获得,选取最小的 $(M-K)$ 个特征值对应的特征向量构成噪声子空间的估计 $\hat{\mathbf{G}} = [\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_M]$ 。由于噪声子空间与阵列流形的方向矢量是正交的:

$$E[\mathbf{a}^H(\theta_i)\mathbf{G}] = E[\mathbf{a}^H(\theta_i)]\mathbf{G} = \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i)\mathbf{G} = 0 \quad (11)$$

定义代价函数:

$$\alpha(\boldsymbol{\gamma}) = \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma})\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{G}}^H\bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}) \quad (12)$$

则分布函数的参数估计 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i$ 可由下式得到:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i = \arg \min_{\boldsymbol{\gamma}} \alpha(\boldsymbol{\gamma}), \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (13)$$

下面分析参数的估计性能。在 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i$ 处将 $\alpha(\boldsymbol{\gamma}_i)$ 的一阶导数即梯度函数 $d(\boldsymbol{\gamma}_i) = \left[\frac{\partial \alpha(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \boldsymbol{\gamma}_i} \right]$ 进行泰勒展开:

$$d(\boldsymbol{\gamma}_i) = d(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i) + H(\boldsymbol{\gamma}_i)|_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i}(\boldsymbol{\gamma}_i - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_i) + O(\boldsymbol{\gamma}_i - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_i)^2 \quad (14)$$

得到估计误差:

$$\varepsilon_i = \hat{\gamma}_i - \gamma_i \approx -H(\gamma_i)|_{\hat{\gamma}_i} [d(\gamma_i) - d(\hat{\gamma}_i)] \quad (15)$$

由于 $\hat{\gamma}_i$ 是局部最小值点, $d(\hat{\gamma}_i) = 0$, (15) 式变成:

$$\varepsilon_i = H(\gamma)|_{\hat{\gamma}_i}^{-1} d(\gamma_i) \quad (16)$$

估计误差的均值为:

$$E[\varepsilon_i] = E[H(\gamma)|_{\hat{\gamma}_i}^{-1} d(\gamma_i)] = H(\gamma)|_{\hat{\gamma}_i}^{-1} E[d(\gamma_i)] \quad (17)$$

由于

$$\begin{aligned} E[d(\gamma_i)] &= E\left[\frac{\partial}{\partial \gamma} [\bar{\mathbf{a}}^H(\gamma) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\gamma)] \Big|_{\gamma=\gamma_i}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \gamma} [\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{a}}^H(\gamma) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\gamma)] \Big|_{\gamma=\gamma_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \gamma} [\bar{\mathbf{a}}^H(\gamma) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \bar{\mathbf{a}}(\gamma)] \Big|_{\gamma=\gamma_i} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

故 $E[\varepsilon_i] = 0$, 由此得到估计误差的方差为:

$$\begin{aligned} \text{va}(\varepsilon_i) &= E[\varepsilon_i \varepsilon_i^T] = E[H(\gamma)|_{\hat{\gamma}_i}^{-1} d(\hat{\gamma}_i) d^T(\hat{\gamma}_i) H^T(\gamma)|_{\hat{\gamma}_i}^{-1}] \\ &= H(\gamma)|_{\hat{\gamma}_i}^{-1} Q_i H^T(\gamma)|_{\hat{\gamma}_i}^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

其中:

$$\text{va}(\hat{\theta} - \bar{\theta}_i) = [\text{va}(\varepsilon_i)]_1 \quad (20)$$

$$\text{va}(\hat{\sigma}_i - \sigma_i) = [\text{va}(\varepsilon_i)]_2 \quad (21)$$

$H(\gamma) \lambda Q_i$ 以及 $\text{va}(\varepsilon_i)$ 的具体表达式及其推导过程见本文附录。

3 仿真结果

为验证模型的正确性以及算法的有效性, 论文对均匀分布和高斯分布两种信号源的 DOA 估计做了仿真, 并考虑了单一信号源和两个信号源两种情况。在单一信号源的仿真中, 取阵元数为 12, 快照数为 50, 信噪比为 5dB, 信号 DOA 的均值 $\bar{\theta} = 15^\circ$, 仿真结果如图 1~4 所示。图中横坐标表示信号 DOA, 纵坐标表示 DIS-MUSIC 谱(反比于代价函数)和 MUSIC 谱。图 1、2 假定已正确获得信号源的分布类型信息, 其中, 图 1 是均匀分布, 对应着不同的角度展开值 σ , 分别是 1° 、 5° 以及 10° 。类似地, 图 2 是高斯分布信号的估计结果。容易看出, 当角度展开 σ 较小时(近似点目标), 两种算法都能正确估计出信号的 DOA 均值; 当 σ 增大时, MUSIC 的估计出现偏差并失效, 而所提的 DIS-MUSIC 算法依然能作出正确估计。图 3 和图 4 是信号源的分布类型判断错误时计算得到的 DIS-MUSIC 谱, 图中三条曲线分别对应着不同的 σ 值。图 3 信号为高斯分布, 判断为均匀分布, 图 4 是将均匀分布误判为高斯分布, 仿真结果表明, 判为均匀分布时的估计效果要好些。因此在实际应用中, 当信号分布未知时, 可以假定为均匀分布。图 5、6 是存在两个分布信号源的情况, 两信号源的角度均值分别为 10° 和 15° , 角度展开为 5° , 即两信号存在空间的重叠。图 5 中的信号源为均匀分布, 图 6 中信号为高斯分布。结果表明, MUSIC 算法不能分辨两信号, 而 DIS-MUSIC 能正确分辨出两个信号。

4 结论

无线移动通信中, 由于多径效应、散射等因素的影响, 目标呈现出分布信号源的特性, 此时, 传统的基于点目标假设下的 DOA 估计算法往往失效, 为此, 论文建立了分布源的信号模型, 提出了分布信号的 DIS-MUSIC 估计算法, 并分析了该算法的估计性能。最后进行了仿真, 结果表明, 所建模型合理, 估计性能优于传统算法。此外还发现, 当未知信号分布特性时, 假定为均匀分布的估计效果较好。

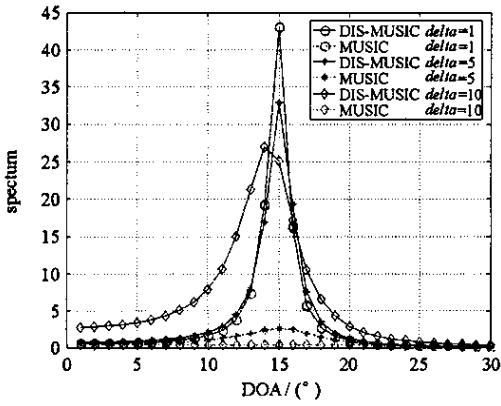


图1 均匀分布信号源

Fig.1 Spectrum of an uniformly distributed source

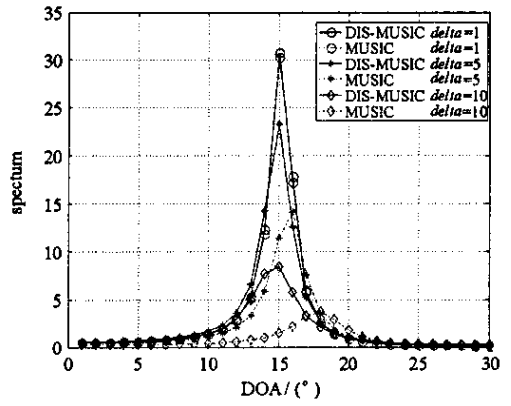


图2 高斯分布信号源

Fig.2 Spectrum of a Gaussian distributed source

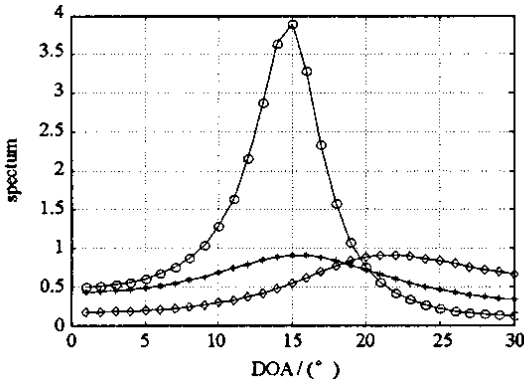


图3 高斯分布误判为均匀信号源

Fig.3 Spectrum of a Gaussian distributed source under the assumption of uniformly distribution

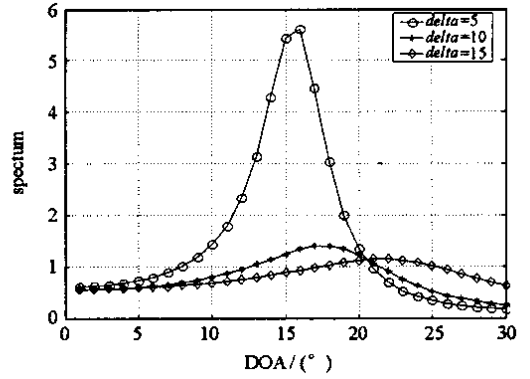


图4 均匀分布误判为高斯分布

Fig.4 Spectrum of an uniformly distributed source under the assumption of Gaussian distribution

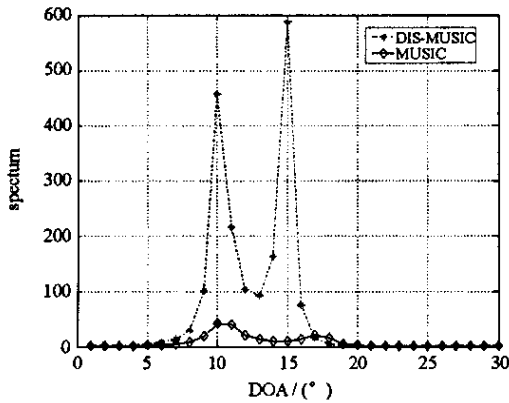


图5 存在两均匀分布信号源

Fig.5 Spectrums of two uniformly distributed sources

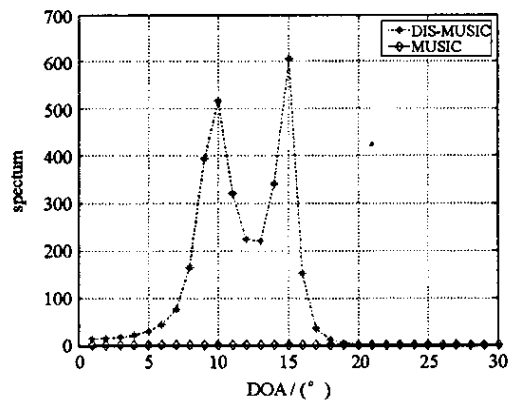


图6 存在两个高斯分布信号源

Fig.6 Spectrums of two Gaussian distributed sources

附录

$$\begin{aligned}
 d(\boldsymbol{\gamma}_i) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i) + \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i) + \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}}{\partial \sigma_i} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2\text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}\right\} \\ 2\text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}\right\} \end{bmatrix} \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(\boldsymbol{\gamma}_i) &= \left[\frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \boldsymbol{\gamma}_i} \right] \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}\right\} & 2 \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}\right\} \\ 2 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}\right\} & 2 \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}\right\} \end{bmatrix} \quad (23)
 \end{aligned}$$

由于 $\hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i) \approx 0$, 于是有:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}\right\} &= \text{Re}\left\{\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial^2 \theta_i}\right\} + \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}}{\partial \theta_i}\right\} \\
 &\approx \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}}{\partial \theta_i}\right\} \quad (24)
 \end{aligned}$$

故可以得到:

$$H(\boldsymbol{\gamma}_i) = \begin{bmatrix} 2\text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}}{\partial \theta_i}\right\} & 2\text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}}{\partial \theta_i}\right\} \\ 2\text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}}{\partial \sigma_i}\right\} & 2\text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}}{\partial \sigma_i}\right\} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 Q_i &= E[d(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i) d^H(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i)] = E \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}\right)^2 \frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i} \frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i} \\ \frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i} \frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i} \left(\frac{\partial d(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}\right)^2 \end{bmatrix} \\
 &= 4 \begin{bmatrix} \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}\right\}^2 & q_{12} \\ q_{21} & \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}\right\}^2 \end{bmatrix} \quad (26)
 \end{aligned}$$

其中,

$$q_{12} = q_{21} = \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \theta_i}\right\} \text{Re}\left\{\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^H(\boldsymbol{\gamma}_i) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\gamma}_i)}{\partial \sigma_i}\right\} \quad (27)$$

参考文献:

- [1] Kim S C. DOA Estimation of Angle-perturbed Sources for Wireless Mobile Communication[J]. IEICE Trans. Communication, 2000, E83-B(11): 2537-2541.
- [2] Meng Y, Stoica P, Wong K M. Estimation of the Directions of Arrival of Spatially Dispersed Signals in Array Processing[J]. IEEE. Proc. Radar, Sonar Navig., 1996, 143(1): 1-9.

