文章编号:1001 - 2486(2005)03 - 0100 - 05

线性方程组二级迭代法的收敛速度*

蔡　放[1,2],熊岳山[3]

(1. 国防科技大学 理学院,湖南 长沙　410073; 2. 长沙大学 数学与信息科学系,湖南 长沙　410003;
3. 国防科技大学 计算机学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:二级迭代法由内、外迭代和内迭代次数三部分组成。给出了线性方程组二级迭代法 R_1 - 收敛因子的一个上界,这个上界由内、外迭代的 R_1 - 收敛因子和内迭代次数所决定,其主部为外迭代的 R_1 - 收敛因子。在矩阵单调性条件下,对于任何内迭代方法和任意内迭代次数,证明了外迭代的 R_1 - 收敛因子也是二级迭代法 R_1 - 收敛因子的下界。所得结果反映了内、外迭代的收敛速度以及内迭代次数对于二级迭代法收敛速度的综合影响。

关键词:线性方程组;二级迭代法;收敛速度

中图分类号:O241.6　　文献标识码:A

Convergence Rates of Two-stage Iterative Methods for Linear Systems

CAI Fang[1,2], XIONG Yue-shan[3]

(1. College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Department of Mathematics and Information Science, Changsha University, Changsha 410003, China;
3. College of Computer, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Two-stage iterative method is comprised by the inner and outer iteration and the numbers of inner iteration. We find out an upper bound of R_1 - factor of two-stage iterative methods for solution of linear systems. And the upper bound is expressed applying the R_1 - factors of the inner and outer iteration and the numbers of the inner iteration; the premier parts of the upper bound is the R_1 - factor of outer iteration. Furthermore, for any inner iteration method and any numbers of the inner iteration, it is also showed that the lower bound of the R_1 - factor of the two-stage iterative method can also be given by the R_1 - factor of the outer iteration in the case of monotone matrices. The results indicate the effects of convergence rates of the inner and outer iteration and the numbers of inner iteration on the convergence rates of the two-stage iterative method.

Key words: linear systems; two-stage iterative method; convergence rate

给定线性方程组

$$AX = b \quad (A\text{ 为非奇异方阵}) \tag{1}$$

文献[1]以块 Gauss - Seidel 二级迭代法为特例,引入矩阵 A 的复合分裂,形如:

$$A = M - N_1 - N_2 \tag{2}$$

以复合分裂(2)式为最外层分裂,文献[1]讨论了求解线性方程组(1)的嵌套迭代法。当嵌套层次等于 1 时,则为实用的二级迭代法或内外迭代法。(2)式称为二级迭代法的外分裂,它给定二级迭代的外迭代:

$$MX^{(k)} = N_2 X^{(k)} + N_1 X^{(k-1)} + b \tag{3}$$

如果将(3)式左边的 $X^{(k)}$ 视为方程 $MX = N_2X^{(k)} + N_1X^{(k-1)} + b$ 的(隐式)解,那么,为了减少计算开销,可以不求其精确解,代之以内迭代的某种迭代方法求其近似解。为此,分裂矩阵

$$M = F - G \tag{4}$$

---

* 收稿日期:2005 - 01 - 18
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60176028,60371036);湖南省自然科学专项基金资助项目(02JJY5010)
作者简介:蔡放(1958—),男,副教授,硕士。

它称为二级迭代法的内分裂。于是,求解线性方程组(1)的二级迭代法为[1,2]:任意给定初值 $X^{(0)}$($k=1,2,\cdots$),

$$\begin{cases} Y^{(k,0)}=X^{(k-1)} \\ \boldsymbol{F}Y^{(k,j)}=\boldsymbol{G}Y^{(k,j-1)}+(\boldsymbol{N}_2X^{(k)}+\boldsymbol{N}_1X^{(k-1)}+b) \quad (j=1,\cdots,s(k)) \\ X^{(k)}=Y^{(k,s(k))} \end{cases}$$

其中,居中的等式为第 k 步内迭代,正整数 $s(k)$ 为第 k 步内迭代次数。内迭代的迭代矩阵 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{G}$ 称为内迭代矩阵,外迭代(3)式的迭代矩阵 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)^{-1}N_1$ 称为外迭代矩阵。如果内分裂(4)式为收敛分裂,即 $\boldsymbol{M}$ 可逆且 $\rho(\boldsymbol{H})<1$,则上述二级迭代法可改写为整体迭代形式:

$$\boldsymbol{M}_{s(k)}X^{(k)}=N_{s(k)}X^{(k-1)}+b \quad (k\geqslant 1) \tag{5}$$

其中,

$$\boldsymbol{M}_s=\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2, \quad \boldsymbol{N}_s=\boldsymbol{C}_s+\boldsymbol{N}_1$$

$$\boldsymbol{B}_s=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^s)^{-1}, \quad \boldsymbol{C}_s=\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{H}^s$$

(s 为任意正整数)。显然有 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{C}_s$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_s-\boldsymbol{N}_s$。

二级迭代法及其收敛性结果可参见文献[1~6]。本文研究二级迭代法(5)式的(渐进)收敛速度。我们知道,除了每步迭代所需的计算开销,任何一种迭代法的有效性都取决于它的收敛速度。对于二级迭代法(5)式,它实际上由内、外迭代和内迭代次数 $s(k)$ 三部分组成,本文主要结果是,用内、外迭代的 R_1-收敛因子和内迭代次数给出了二级迭代法(5)式的 R_1-收敛因子的估计,所得结果较为清楚地反映出内、外迭代的收敛速度和内迭代次数三者之间如何综合影响二级迭代法的收敛速度。当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 单调($\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$)时,文献[1]曾证明二级迭代法(5)式的收敛速度关于内迭代次数单调不减,这使人联想到通过不断增加内迭代次数可设计收敛得愈来愈快的二级迭代过程。但分析和数值计算表明,二级迭代法(5)式的收敛速度主要取决于外迭代的收敛速度,太多的内迭代次数除了增加计算量外,对加快二级迭代法收敛并不能产生明显的作用。虽然理论上仍然不清楚如何确定最优的内迭代次数,但是,尽量选择收敛较快的外迭代方法并将内迭代次数控制在尽可能小的范围总是合理的。相对外迭代而言,内迭代对(5)式收敛速度的影响是次要的。作为准备,先给出一个引理。

引理　设外分裂(2)式为收敛复合分裂(即 $\boldsymbol{M}-N_2$ 可逆且 $\rho(T)<1$),内分裂(4)式为收敛分裂,$\boldsymbol{Q}_s=\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^s)\boldsymbol{M}^{-1}N_2$,则 $\|\boldsymbol{Q}_s\|$ 有界,且 s 充分大时,$\boldsymbol{Q}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_s$ 均可逆,以及 $\|\boldsymbol{Q}_s^{-1}\|$ 有界。

证明　矩阵 $\boldsymbol{M}_s$ 可改写为:

$$\boldsymbol{M}_s=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^s)^{-1}\boldsymbol{Q}_s \tag{6}$$

由于 $\rho(\boldsymbol{H})<1$,所以 $\lim\limits_{s\to+\infty}\boldsymbol{H}^s=0$。于是有 $\lim\limits_{s\to+\infty}\boldsymbol{Q}_s=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}^{-1}N_2=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{M}-N_2)$。

由此可知 $\|\boldsymbol{Q}_s\|$ 有界。由于矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{M}-N_2)$ 可逆,故 s 充分大时,$\boldsymbol{Q}_s$ 也是可逆的。由(6)式可知 $\boldsymbol{M}_s$ 可逆,并且 $\lim\limits_{s\to+\infty}\boldsymbol{Q}_s^{-1}=[\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{M}-N_2)]^{-1}=(\boldsymbol{M}-N_2)^{-1}\boldsymbol{M}$,因此 $\|\boldsymbol{Q}_s^{-1}\|$ 有界。

1　R_1-收敛因子估计

根据引理,在二级迭代法(5)式的内、外迭代都收敛的情况下,只要内迭代次数的最小值 $\min\limits_{k\geqslant 1}s(k)$ 充分大,则所有 $M_{s(k)}$($k\geqslant 1$)可逆。从而对任何初值 $X^{(0)}$,二级迭代法(5)式产生唯一确定的迭代序列 $X^{(k)}$($k\geqslant 1$)。因此,以下总设 $\min\limits_{k\geqslant 1}s(k)$ 已充分大,使得所有 $M_{s(k)}$($k\geqslant 1$)可逆。

设 X^* 为(1)式的解,$\boldsymbol{T}_s=\boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{N}_s$。(5)式的第 k 步迭代误差 $e^{(k)}$ 和 R_1-收敛因子 α 分别为:

$$e^{(k)} = X^{(k)} - X^* = T_{s(k)}T_{s(k-1)}\cdots T_{s(1)}e^{(0)} \triangleq \prod_{j=1}^{k}T_{s(j)}e^{(0)}$$

$$\alpha = \sup_{e^{(0)}}\{\limsup_{k\to+\infty}\|e^{(k)}\|^{\frac{1}{k}} \lim_{k\to+\infty}e^{(k)}=0\}$$

以下,用 $\hat{s}$ 表示 $\liminf\limits_{k\to+\infty}s(k)$。

定理1 设外分裂(2)式为 A 的收敛复合分裂，内分裂(4)式为 M 的收敛分裂，$M_{s(k)}(k\geqslant 1)$ 可逆，则：

① 当 $\hat{s}$ 充分大时，二级迭代法(5)式收敛到(1)式的解 X^*；

② $\forall \varepsilon>0(\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon<1,\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon<1)$，存在 $s_\varepsilon>0$，当 $\hat{s}>s_\varepsilon$ 时，二级迭代法(5)式的 R_1－收敛因子 α 满足：

$$\alpha\leqslant\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{\hat{s}}<1 \tag{7}$$

其中，若 $\hat{s}=+\infty$，则 $(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{\hat{s}}=0$。

证明 取矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|\boldsymbol{T}\|\leqslant\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon$。根据引理，设 s 充分大，使得 $\boldsymbol{Q}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_s$ 均可逆。于是有：

$$\boldsymbol{T}_s-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{N}_s-(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)^{-1}\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_s^{-1}(\boldsymbol{N}_s-\boldsymbol{N}_1)+\boldsymbol{M}_s^{-1}[(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)-\boldsymbol{M}_s]\boldsymbol{T}$$

注意到，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)-\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_s-\boldsymbol{N}_s$，可知 $\boldsymbol{N}_s-\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_s-(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)$，代入上式得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_s-\boldsymbol{T}&=\boldsymbol{M}_s^{-1}[\boldsymbol{M}_s-(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)](\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})=\boldsymbol{M}_s^{-1}[\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2-(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)](\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})\\&=\boldsymbol{M}_s^{-1}[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^s)^{-1}-\boldsymbol{M}](\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})=\boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^s)^{-1}\boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})\end{aligned}$$

利用(6)式，$\boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^s)^{-1}=\boldsymbol{Q}_s^{-1}$，因而有

$$\boldsymbol{T}_s-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}_s^{-1}\boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})$$

即，$\boldsymbol{H}^s=\boldsymbol{Q}_s(\boldsymbol{T}_s-\boldsymbol{T})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}$。

根据引理，$\|\boldsymbol{Q}_s\|$ 和 $\|\boldsymbol{Q}_s^{-1}\|$ 有界，从上面两式不难得到 $\limsup\limits_{s\to+\infty}\|\boldsymbol{T}_s-\boldsymbol{T}\|^{\frac{1}{s}}=\limsup\limits_{s\to+\infty}\|\boldsymbol{H}^s\|^{\frac{1}{s}}$。而 $\limsup\limits_{s\to+\infty}\|\boldsymbol{H}^s\|^{\frac{1}{s}}=\rho(\boldsymbol{H})$，于是，存在 $s_\varepsilon>0$，使得：

$$\|\boldsymbol{T}_s-\boldsymbol{T}\|\leqslant(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^s\quad(s>s_\varepsilon) \tag{8}$$

不妨设 s_ε 充分大，使得：

$$\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{s_\varepsilon}<1 \tag{9}$$

定义单调不减点列 $\tilde{s}(k)=\min\limits_{t\geqslant k}s(t)(k\geqslant 1)$。易知 $s(k)\geqslant\tilde{s}(k)(k\geqslant 1)$，且 $\hat{s}=\lim\limits_{k\to+\infty}\tilde{s}(k)$。于是，当 $\hat{s}>s_\varepsilon$ 时，存在 $k_0>0$，使得 $s(k)\geqslant\tilde{s}(k)>s_\varepsilon(k\geqslant k_0)$。因此，由(8)式即知，$k\geqslant k_0$ 时，有

$$\begin{aligned}\|T_{s(k)}\|&\leqslant\|\boldsymbol{T}\|+\|T_{s(k)}-T\|\leqslant\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{s(k)}\\&\leqslant\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{\tilde{s}(k)}\leqslant\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{s_\varepsilon}\end{aligned} \tag{10}$$

利用(10)式最后一个不等式，有：

$$\begin{aligned}\|e^{(m)}\|&\leqslant\prod_{k=1}^{k_0-1}\|T_{s(k)}\|\cdot\prod_{k=k_0}^{m}\|T_{s(k)}\|\cdot\|e^{(0)}\|\leqslant\prod_{k=1}^{k_0-1}\|T_{s(k)}\|\\&\quad\cdot\prod_{k=k_0}^{m}(\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{s_\varepsilon}\cdot\|e^{(0)}\|\\&=\prod_{k=1}^{k_0-1}\|T_{s(k)}\|\cdot(\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{s_\varepsilon})^{m-k_0+1}\cdot\|e^{(0)}\|\end{aligned}$$

故由(9)式即知 $\lim\limits_{m\to+\infty}\|e^{(m)}\|=0$，①得证。再用(10)式的第三个不等式，有：

$$\begin{aligned}\|e^{(m)}\|^{\frac{1}{m}}&\leqslant\Big(\prod_{k=1}^{k_0-1}\|T_{s(k)}\|\Big)^{\frac{1}{m}}\cdot\Big(\prod_{k=k_0}^{m}\|T_{s(k)}\|\Big)^{\frac{1}{m}}\cdot\|e^{(0)}\|^{\frac{1}{m}}\\&\leqslant\Big(\prod_{k=1}^{k_0-1}\|T_{s(k)}\|\Big)^{\frac{1}{m}}\cdot\Big(\frac{1}{m-k_0+1}\sum_{k=k_0}^{m}\|T_{s(k)}\|\Big)\cdot\|e^{(0)}\|^{\frac{1}{m}}\\&\leqslant\Big(\prod_{k=1}^{k_0-1}\|T_{s(k)}\|\Big)^{\frac{1}{m}}\cdot\Big\{\frac{1}{m-k_0+1}\sum_{k=k_0}^{m}\{\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+[\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon]^{\tilde{s}(k)}\}\Big\}\cdot\|e^{(0)}\|^{\frac{1}{m}}\end{aligned} \tag{11}$$

因为，$\lim\limits_{k\to+\infty}\{\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+[\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon]^{\tilde{s}(k)}\}=\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+[\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon]^{\hat{s}}$，所以，$m\to+\infty$ 时，(11)式最后一个

大括号内的算术平均值的极限为 $\rho(T)+\varepsilon+[\rho(H)+\varepsilon]^{\hat{s}}$,从而证明了(7)式的第一个不等号。而(7)式中严格不等号成立是因为(9)式以及 $\hat{s}>s_\varepsilon$。证毕。

定理 1 表明,当内、外迭代都收敛,且 $\hat{s}$ 充分大(即内迭代次数充分大)时,二级迭代法(5)式收敛,并且,其 R_1 – 收敛因子 α 的上界约为:

$$\rho(\boldsymbol{T})+\rho^{\hat{s}}(\boldsymbol{H}) \tag{12}$$

因为,$\rho(\boldsymbol{H})$和 $\rho(\boldsymbol{T})$分别是内、外迭代的 R_1 – 收敛因子,所以,(12)式反映了内、外迭代的收敛速度和内迭代次数三者之间对于二级迭代法收敛速度的综合影响。

推论　设外分裂(2)式为 A 的收敛复合分裂,内分裂(4)式为 $\boldsymbol{M}$ 的收敛分裂,$\boldsymbol{M}_{s(k)}(k\geqslant 1)$可逆。如果 $\lim\limits_{k\to+\infty}s(k)=+\infty$,则二级迭代法(5)式收敛到(1)式的解,其 R_1 – 收敛因子 $\alpha\leqslant\rho(\boldsymbol{T})$。

推论推广了文献[3]定理 2.4,那里其实是外分裂 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_1-\boldsymbol{N}_2$ 中 $\boldsymbol{N}_2=0$ 的情形。

从(12)式看到,由于 $\rho(\boldsymbol{H})<1$,外迭代的 R_1 – 收敛因子 $\rho(\boldsymbol{T})$是 α 的上界主部,$\hat{s}$ 越大,(12)式越接近 $\rho(\boldsymbol{T})$。而当 $\hat{s}=+\infty$时,根据上述推论,$\rho(\boldsymbol{T})$就是 α 的上界。这里提出了一个问题:是否有可能 $\alpha<\rho(\boldsymbol{T})$?即二级迭代法能否比它的外迭代收敛得更快?直觉上,答案应该是否定的,因为二级迭代每一步都是通过内迭代求外迭代(3)式的近似解。在矩阵 A 单调时,情况确实如此——对于任何内迭代次数,$\rho(\boldsymbol{T})$总是 α 的下界。

定理 2　设外分裂(2)式为 A 的收敛正则复合分裂(即 $\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2$ 和 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1$ 均为 A 的收敛正则分裂(此蕴涵 $A^{-1}\geqslant 0$)),内分裂(4)式为 $\boldsymbol{M}$ 的弱正则分裂,则对于任何内迭代次数 $s(k)\geqslant 1(k\geqslant 1)$,二级迭代法(5)式收敛到(1)式的解,且 $\alpha\geqslant\rho(\boldsymbol{T})$。

证明　在定理的条件下,对于任何内迭代次数 $s(k)(k\geqslant 1)$,(5)式必收敛,且对于任何正整数$s\geqslant 1$,$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_s^{-1}\boldsymbol{N}_2)^{-1}$和 $\boldsymbol{T}_s$ 均非负[1,2]。只需证明 $\alpha\geqslant\rho(\boldsymbol{T})$。

令 $\rho=\rho(\boldsymbol{T})$。因 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{N}_1\geqslant 0$,故存在非负向量 $X\neq 0$,使得 $\boldsymbol{T}X=\rho X$,即 $\boldsymbol{N}_1X=\rho(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)X$。于是,对任何 $s\geqslant 1$,有:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_sX&=\boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{N}_sX=(\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2)^{-1}(\boldsymbol{C}_s+\boldsymbol{N}_1)X=(\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2)^{-1}[\boldsymbol{C}_s+\rho(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}_2)]X\\&=(\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2)^{-1}[\rho(\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2)+\rho\boldsymbol{M}-\rho\boldsymbol{B}_s+\boldsymbol{C}_s]X\\&=\rho X+(\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2)^{-1}(\rho\boldsymbol{M}-\rho\boldsymbol{B}_s+\boldsymbol{C}_s)X=\rho X+(\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2)^{-1}(-\rho\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{H}^s+\boldsymbol{C}_s)X\\&=\rho X+(1-\rho)(\boldsymbol{B}_s-\boldsymbol{N}_2)^{-1}\boldsymbol{C}_sX=\rho X+(1-\rho)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_s^{-1}\boldsymbol{N}_2)^{-1}\boldsymbol{H}^sX\geqslant\rho X\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{T}_{s(k)}X\geqslant\rho X(k\geqslant 1)$。取初始误差 $e^{(0)}=X$,并注意到 $T_{s(k)}\geqslant 0(k\geqslant 1)$,便有:

$$e^{(k)}=T_{s(k)}T_{s(k-1)}\cdots T_{s(1)}e^{(0)}\geqslant\rho^kX\quad(k\geqslant 1)$$

R_1 – 收敛因子 α 与范数无关。于是,应用某个单调范数即得 $\alpha\geqslant\limsup\limits_{k\to\infty}\|e^{(k)}\|^{\frac{1}{k}}\geqslant\rho$。

综合定理 1、2 和推论,可得:

定理 3　设外分裂(2)式为 A 的收敛正则复合分裂,内分裂(4)式为 $\boldsymbol{M}$ 的弱正则分裂,则对于任何内迭代次数 $s(k)\geqslant 1(k\geqslant 1)$,二级迭代法(5)式收敛到(1)式的解,并且,$\forall\varepsilon>0(\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon<1,\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon<1)$,存在 $s_\varepsilon>0$,当 $\hat{s}>s_\varepsilon$ 时,二级迭代法(5)式的 R_1 – 收敛因子 α 满足:

$$\rho(\boldsymbol{T})\leqslant\alpha\leqslant\rho(\boldsymbol{T})+\varepsilon+(\rho(\boldsymbol{H})+\varepsilon)^{\hat{s}}<1 \tag{13}$$

而且,当 $\lim\limits_{k\to+\infty}s(k)=+\infty$时,$\alpha=\rho(\boldsymbol{T})$。

在定理 3 的条件下,从不等式(13)式看到,由于 $\rho(\boldsymbol{H})<1$,当 $\hat{s}$ 充分大时,α 的上界主部和下界均为外迭代的 R_1 – 收敛因子 $\rho(\boldsymbol{T})$,所以二级迭代法的收敛速度主要取决于外迭代方法。一方面,内迭代次数愈大,二级迭代的收敛速度愈接近但又不会超过外迭代的收敛速度;另一方面,由于 α 的上界主部等于下界 $\rho(\boldsymbol{T})$,因此,太大的内迭代次数除了带来计算量的增加,对于加速二级迭代收敛不会有显著的影响。

2　数值例子

用五点差分格式解边界条件 $u(x,y)=0$ 的 Dirichlet 模型问题 $u_{xx}+u_{yy}=0$,$(0<x,y<1)$。取步长

为$1/N+1$的均匀网格,差分逼近方程为 $AX=0$,有

$$A=\begin{bmatrix} D & -I & & 0 \\ -I & D & -I & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & & -I & D \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{bmatrix}_{NXN}$$

外迭代分别采用线 Jacobi 和线 Gauss-Seidel 方法,内迭代分别采用点 Jacobi 和最优松弛因子 ω_b 的点 SOR 方法,从而导致四种二级迭代方法:线 J-点 J、线 J-点 SOR 和线 GS-点 J、线 GS-点 SOR。点 SOR 方法的最优松弛子因子 $\omega_b=2/[1+\sqrt{1-\rho^2(B)}]$,其中,$B=I-\frac{1}{4}D$ 为矩阵D 的点 Jacobi 矩阵。可以验证,对于 B 的特征值$\lambda=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{N+1}$,相应地有正特征向量,其分量为 $v_i=\sin\frac{i\pi}{N+1}>0(i=1,\cdots,N)$。因此,从 $B\geqslant 0$ 可知 $\rho(B)=\lambda$。

取 $N=64(\omega_b=1.0716)$,初值 $X^{(0)}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$,停止准则$|X^{(k)}-X^{(k-1)}|\leqslant 10^{-9}$,内迭代次数 $s(k)\equiv p=\hat{s}(k>1)$。

计算结果见表 1。从中可看到,随着内迭代次数的增加,任何一种二级迭代法的收敛速度都越来越接近外迭代的收敛速度。但是,如果外迭代方法相同,则当内迭代次数增加到一定程度后($p\geqslant 3$、4),无论内迭代采用 Jacobi 方法还是采用最优松弛因子的 SOR 方法,内迭代次数的继续增加都不能显著地加快二级迭代法的收敛速度。迭代次数的显著减少完全是由外迭代方法从线 Jacobi 到线 Gauss-Seidel 的变化所引起的。

表 1 模型问题的数值结果

Tab.1 Numerical results for model problem

内迭代次数 p	迭 代 次 数			
	线 J-点 J	线 J-点 SOR	线 GS-点 J	线 GS-点 SOR
1	12 101	12 400	13 613	5241
2	10 373	9780	7564	4718
3	9683	9257	5835	4587
4	9371	9126	5145	4553
5	9223	9092	4833	4554
6	9151	9083	4684	4552
7	9115	9081	4612	4541
8	9098	9080	4576	4541
9	9089	9080	4559	4541
	线 J:9080		线 GS:4541	

参 考 文 献:

[1] Lanzkron P J, Rose D J, Szyld D B. Convergence of Nested Classical Iterative Methods for Linear Systems[J]. Numer. Math., 1991, 58:685-702.

[2] 曹志浩. 线性方程组二级迭代法的收敛性[J]. 计算数学, 1995, (1):99-109.

[3] Frommer A, Szyld D B. H_splittings and Two-stage Iterative Methods[J]. Numer. Math., 1992, 63:345-356.

[4] Frommer A, Szyld D B. Asynchronous Two-stage Iterative Methods[J]. Numer. Math., 1994, 69:141-153.

[5] Nichols N K. On the Convergence of Two-stage Iterative Processes for Solving Linear Equations[J]. SIAMJ. Numer. Anal., 1973, 10:460-469.

[6] Bai Z Z, Migallón V, Penadés J, et al. Block and Asynchronous Two-stage Mthods for Mildly Nonlinear Systems[J]. Numer. Math., 1999, 82:1-20.

[7] O'Leary D P, White R E. Multi-splittings of Matrices and Parallel Solution of Linear Systems[J]. SIAM. Alg. Dis. Meth., 1985, 6:630-640.

[8] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[9] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.