文章编号:1001-2486(2005)03-0120-05

二阶中立型含逐段常滞量微分方程的伪概周期解的存在性*

杨淑芳,王 鑫

(国防科技大学 理学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:讨论下列中立型含逐段常滞量微分方程的伪概周期解

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)+p(t)x(t-1))=qx(2[\frac{t+1}{2}])+g(t,x(t),x[t])$$

采用不动点定理和构造伪概周期序列的方法,得到了此方程的伪概周期解的存在性,并推广了文献[5~8]中的有关结果。

关键词:伪概周期解;伪概周期序列;中立型;逐段常滞量

中图分类号:O175 **文献标识码**:A

The Existence of Pseudo-almost Periodic Solutions of Second-order Neutral Delay Differential Equations with Piecewise Constant Argument

YANG Shu-fang, WANG Xin

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract:We consider the following neutral functional differential equation with piecewise constant delay:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)+p(t)x(t-1))=qx(2[\frac{t+1}{2}])+g(t,x(t),x[t])$$

By using fixed point theorem and the method of pseudo-almost periodic sequence, we get the existence of the pseudo-almost periodic solution of this equation. Also, some results in reference [5~8] have been extended.

Key words:pseudo-almost periodic solution; pseudo-almost periodic; piecewise constant delay; sequence

本文讨论下列含逐段常滞量微分方程的伪概周期解的存在性:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)+p(t)x(t-1))=qx\left(2\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)+g(t,x(t),x[t]) \tag{1}$$

其中,q 是非零常数,$p(t)$是伪概周期函数,$g:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\mapsto\boldsymbol{R}$ 是关于 t 在 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 上的一致伪概周期函数,$[\cdot]$表示最大取整函数。

对任意整数 n,当 $2n-1\leqslant t<2n$ 时,变量 $T(t)=t-2[(t+1)/2]$是负的(方程(1)是超前型的),而当 $2n\leqslant t<2n+1$ 时,该变量是正的(方程(1)是滞后型的)。关于含逐段常滞量微分方程已有许多出色的工作。这类方程最先是 Cooke 和 Wiener[1] 以及 Shan 和 Wiener[2] 所研究的。含逐段常滞量微分方程是既含连续型又含离散型变量的动力系统,因而它们既有微分方程的性质,又有差分方程的性质,这是最令人感兴趣的地方。Cooke 和 Wiener[3] 叙述了关于含逐段常滞量微分方程的最新进展,其中可看出:已往的工作主要集中于研究周期解的稳定性、振动性、存在性。在文献[4]中,Papaschinopoulos 研究这些方程的拓扑等价性和渐近性态。Yuan[5] 和 Li[6] 证明下列含逐段常变量微分方程和方程(1)伪概周期解的存在性:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)+px(t-1))=qx\left(2\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)+g(t,x(t),x[t]) \tag{2}$$

Yuan[7] 和 Wangxin[8] 证明方程(2)伪概周期解的存在性,推广 Zhang[9] 关于概周期解的结论。

* 收稿日期:2004-12-07
作者简介:杨淑芳(1968—),女,讲师,硕士。

假设函数 $x:\boldsymbol{R}\mapsto\boldsymbol{R}$ 是方程(1)的解,若下列条件都满足:

(1) x 在 $\boldsymbol{R}$ 上是连续的;

(2) $x(t)+px(t-1)$的二阶导数在 $\boldsymbol{R}$ 存在,可能除去点 $t=n\in\boldsymbol{Z}$,但单侧导数存在;

(3) 在每一个$(n,n+1)$上 x 满足方程(1),$n\in\boldsymbol{Z}$。

1 定义及引理

定义 1[8] 称函数 $f:\boldsymbol{R}\mapsto\boldsymbol{R}$ 为伪概周期函数,若 f 可以表示成和式$f=f^{ap}+f^{e}$:其中,f^{ap}是概周期的,f^{e} 连续有界且满足:

$$M(f^{e}):=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f^{e}|\mathrm{d}s=0$$

f^{ap}和f^{e} 分别称为函数f 概周期部分和遍历扰动。

注 f^{ap} 和f^{e} 都是唯一确定的。事实上,$M(f^{ap})=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f^{ap}|\mathrm{d}s$ 是$AP(\boldsymbol{R})$ 的范数。

定义 2[8] 称函数 $g:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\mapsto\boldsymbol{R}$ 为关于 t 在 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 的一致伪概周期函数,若 g 可以表示成和式 $g=g^{ap}+g^{e}$,其中,g^{ap}是关于 t 在 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 一致概周期的,在任意 $W\subseteq\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$,$g^{e}$ 连续有界且满足:

$$M(g^{e}):=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|g^{e}(t,x,y)|\mathrm{d}s=0$$

在$(x,y)\in W$ 上一致成立,g^{ap}和 g^{e} 分别称为函数 g 的概周期部分和遍历扰动。

定义 3[6] 称序列 $x:\boldsymbol{Z}\mapsto\boldsymbol{R}$ 为伪概周期序列,若 x 可表示成和式 $x(n)=x^{ap}(n)+x^{e}(n)$,$n\in\boldsymbol{Z}$,其中 x^{ap}是概周期序列,x^{e} 有界且

$$M(x^{e}):=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2T}\sum_{n=-N}^{N}|x^{e}(n)|=0$$

x^{ap}和 x^{e} 分别称为 x 的概周期部分和遍历扰动。

引理 1[6] 如果 $f(t)$为伪概周期函数,则序列

$$\{f_n^{(1)}\}_{n\in\boldsymbol{Z}}=\left\{\int_n^{n+1}\int_n^{s}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s\right\}_{n\in\boldsymbol{Z}},\quad \{f_n^{(2)}\}_{n\in\boldsymbol{Z}}=\left\{\int_n^{n-1}\int_n^{s}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s\right\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$$

为伪概周期序列。

引理 2[6] 设 $x(t)$是伪概周期函数,$g(t,\cdot,\cdot)$为关于 t 在 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 的一致伪概周期函数,且满足:

$$|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)|\leqslant\eta(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|),\quad\forall(t,x_i,y_i)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R},i=1,2$$

则函数 $g(t,x(t),x[t])$是伪概周期函数。

引理 3 设 $f(t)$、$\varphi(t)$是伪概周期函数,则 $f(t)\varphi(t)$是伪概周期函数。

2 主要结论

设 PAP 表示所有连续的伪概周期函数所组成的集合。对任意 $\varphi\in PAP$,定义 $\|\varphi\|\doteq\sup_{t\in\boldsymbol{R}}|\varphi(t)|$ 为最大模范数,则$(PAP,\|\cdot\|)$是 Banach 空间,仍记为集合 PAP。

首先,考虑方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)+p(t)x(t-1))=qx\left(2\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)+f(t)\tag{3}$$

其中 $f\in PAP$。

对方程(3),考虑方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)+p(t)\varphi(t-1))=qx\left(2\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)+f(t)\tag{4}$$

其中 $\varphi\in PAP$。

定理 1 设 $q>0$ 或 $q<-4$,则对任意 f、$\varphi\in PAP$,方程(4)有唯一伪概周期解。

证明 设 $x(t)$是方程(4)在 $\boldsymbol{R}$ 上的解。对任意 $2n-1\leqslant t<2n+1(n\in\boldsymbol{Z})$,将方程从 $2n$ 到 t 积分两

次可得

$$(x(t)+p(t)\varphi(t-1))-(x(2n)+p(2n)\varphi(2n-1))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+p(t)\varphi(t-1))\bigg|_{t=2n}(t-2n)$$
$$=\frac{1}{2}qx(2n)(t-2n)^2+\int_{2n}^{t}\int_{2n}^{s}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s$$

由解的连续性得到:当 $t=2n+1$,有

$$(x(2n+1)+p(2n+1)\varphi(2n))-(x(2n)+p(2n)\varphi(2n-1))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+p(t)\varphi(t-1))\bigg|_{t=2n}$$
$$=\frac{1}{2}qx(2n)+f_{2n}^{(1)}$$

当 $t=2n-1$,有

$$(x(2n-1)+p(2n-1)\varphi(2n-2))-(x(2n)+p(2n)\varphi(2n-1))+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+p(t)\varphi(t-1))\bigg|_{t=2n}$$
$$=\frac{1}{2}qx(2n)+f_{2n}^{(2)}$$

其中,$\{f_n^{(1)}\}_{n\in\mathbf{Z}}$,$\{f_n^{(2)}\}_{n\in\mathbf{Z}}$定义见引理 1,记

$$g_n=f_n^{(1)}+f_n^{(2)}-p(n+1)\varphi(n)-p(n-1)\varphi(n-2)+2p(n)\varphi(n-1)$$

则有:

$$x(2n+1)-(q+2)x(2n)+x(2n-1)=g_{2n} \tag{5}$$

方程(5)对应的齐次方程是:

$$x(2n+1)-(q+2)x(2n)+x(2n-1)=0 \tag{6}$$

以下,对齐次差分方程(6)寻找形如 $x(n)=\lambda^n$ 的特解,这时,λ 将满足方程

$$\lambda^2-(q+2)\lambda+1=0 \tag{7}$$

有两个非平凡解。

当 $q>0$ 或 $q<-4$,方程(7)有两个不同的单根 λ_1,λ_2,设 $|\lambda_1|<1$ 和 $|\lambda_2|>1$,令

$$c_n=k_1\sum_{m\leqslant n-1}\lambda_1^{n-(m+1)}g_m+k_2\sum_{m\geqslant n}\lambda_2^{n-(m+1)}g_m \tag{8}$$

其中,k_1,k_2 待定。将方程(8)代入方程(5),得

$$k_1\sum_{m\leqslant 2n}\lambda_1^{2n+1-(m+1)}g_m+k_2\sum_{m\geqslant 2n+1}\lambda_2^{2n+1-(m+1)}g_m-(q+2)\Big(k_1\sum_{m\leqslant 2n-1}\lambda_1^{2n-(m+1)}g_m+k_2\sum_{m\geqslant 2n}\lambda_2^{2n-(m+1)}g_m\Big)$$
$$+k_1\sum_{m\leqslant 2n-2}\lambda_1^{2n-1-(m+1)}g_m+k_2\sum_{m\geqslant 2n-1}\lambda_2^{2n-1-(m+1)}g_m=g_{2n}$$

比较 g_m 的系数,得

$$\begin{cases}k_1-k_2=1\\ k_1(\lambda_1-(q+2))+k_2\lambda_2^{-1}=0\end{cases}$$

由此解出

$$\begin{cases}k_1=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\\[2ex] k_2=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\end{cases}$$

则由(8)式定义序列 $\{c_n\}$为(5)式的解,且易证 $\{c_n\}$是伪概周期序列。设

$$D_n=c_{n+1}+p(n+1)\varphi(n)-c_n-p(n)\varphi(n-1)-\frac{1}{2}qc_n-f_n^{(1)}$$

则易验证 $\{D_n\}$是伪概周期序列,令

$$x(t)=-p(t)\varphi(t-1)+(c_{2n}+p(2n)\varphi(2n-1))+D_{2n}(t-2n)$$
$$+\frac{1}{2}qc_{2n}(t-2n)^2+\int_{2n}^{t}\int_{2n}^{s}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s,\quad \forall\, 2n-1\leqslant t<2n+1,n\in\mathbf{Z}$$

则 $x(t)$ 为方程(4)伪概周期解。

下证方程(4)伪概周期解的唯一性。设 $\bar{x}(t)$ 为方程(4)的另一伪概周期解。则 $\{x(n)-\bar{x}(n)\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 是方程(6)的解。因此，存在 k_1, k_2 使得

$$x(n)-\bar{x}(n)=k_1\lambda_1^n+k_2\lambda_2^n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$$

因伪概周期序列是有界的，可得 $x(n)-\bar{x}(n)\equiv 0(n\in\boldsymbol{Z})$。因 $x(t)$ 和 $\bar{x}(t)$ 均是方程(4)的解，可得

$$(x(t)+p(t)\varphi(t-1))-(x(2n)+p(2n)\varphi(2n-1))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+p(t)\varphi(t-1))\Big|_{t=2n}(t-2n)$$
$$=\frac{1}{2}qx(2n)(t-2n)^2+\int_{2n}^{t}\int_{2n}^{s}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s$$

和

$$(\bar{x}(t)+p(t)\varphi(t-1))-(\bar{x}(2n)+p(2n)\varphi(2n-1))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{x}(t)+p(t)\varphi(t-1))\Big|_{t=2n}(t-2n)$$
$$=\frac{1}{2}q\bar{x}(2n)(t-2n)^2+\int_{2n}^{t}\int_{2n}^{s}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s$$

对任意 $2n-1\leqslant t<2n+1, n\in\boldsymbol{Z}$，则有：

$$\bar{x}(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{x}(t)+p(t)\varphi(t-1))\Big|_{t=2n}(t-2n)=x(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+p(t)\varphi(t-1))\Big|_{t=2n}(t-2n)$$

令 $t=2n-1$，得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{x}(t)+p(t)\varphi(t-1))\Big|_{t=2n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+p(t)\varphi(t-1))\Big|_{t=2n}$$

则对任意 $t\in\boldsymbol{R}$，有 $x(t)\equiv\bar{x}(t)$，对任意 $f(t)$、$p(t)\in PAP$，方程(4)有唯一的伪概周期解。

定理 2 对任意 $f(t)$、$p(t)\in PAP$，若 $q>0$ 和 $4M(2+\frac{3}{q})<1$，或 $q<-4$ 和 $4M(1+\frac{3-q}{q+4})<1$，记 $M=\|p(t)\|$，则方程(3)有唯一的伪概周期解。

证明 定义算子 $F: PAP\mapsto PAP$

$$(F\varphi)(t)=-p(t)\varphi(t-1)+(c_{2n}+p(2n)\varphi(2n-1))+D_{2n}(t-2n)$$
$$+\frac{1}{2}qc_{2n}(t-2n)^2+\int_{2n}^{t}\int_{2n}^{s}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s,\forall 2n-1\leqslant t<2n+1$$

则对任意 $\varphi_1,\varphi_2\in PAP$，设 $g_n^{(1)}, g_n^{(2)}, c_n^{(1)}, c_n^{(2)}, D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ 分别为与 φ_1,φ_2 对应的 $g_n, c_n, D_n, g_n, c_n, D_n$ 的定义如同定理 1，则可得：

$$|g_n^{(1)}-g_n^{(2)}|\leqslant 4M\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

$$|c_n^{(1)}-c_n^{(2)}|\leqslant 4M\left(\frac{|k_1|}{1-|\lambda_1|}+\frac{|k_2|}{|\lambda_2|-1}\right)\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

$$|D_n^{(1)}-D_n^{(2)}|\leqslant 2M\|\varphi_1-\varphi_2\|+4M(2+\frac{|q|}{2})\left(\frac{|k_1|}{1-|\lambda_1|}+\frac{|k_2|}{|\lambda_2|-1}\right)\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

从而

$$|(F\varphi_1)(t)-(F\varphi_2)(t)|\leqslant 4M\left(1+(3+|q|)\left(\frac{|k_1|}{1-|\lambda_1|}+\frac{k_2}{|\lambda_2|-1}\right)\right)\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

若 $q>0$，将 $k_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}, k_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}, \lambda_1=\frac{q+2-\sqrt{q^2+4q}}{2}, \lambda_2=\frac{q+2+\sqrt{q^2+4q}}{2}$ 代入以上不等式可得：

$$|(F\varphi_1)(t)-(F\varphi_2)(t)|\leqslant 4M(2+\frac{3}{q})\|\varphi_1-\varphi_2\|,\quad\forall t\in\boldsymbol{R}$$

若 $q<-4$，将 $k_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}, k_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}, \lambda_1=\frac{q+2+\sqrt{q^2+4q}}{2}, \lambda_2=\frac{q+2-\sqrt{q^2+4q}}{2}$ 代入以上不等式可得：

$$|F(\varphi_1)(t)-(F\varphi_2)(t)|\leqslant 4M(1+\frac{q-3}{q+4})\ \|\varphi_1-\varphi_2\|,\quad \forall t\in \boldsymbol{R}$$

在定理的假设中，$\|F\varphi_1-F\varphi_2\|<\|\varphi_1-\varphi_2\|$，这表明 F 是压缩算子，由不动点定理可得 F 有不动点，即方程(3)有伪概周期解。方程(3)有伪概周期解的唯一性的证明同定理1。

定理3 对任意 $p(t)\in PAP$，假设 $g(t,\cdot,\cdot)$ 是关于 t 在 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 上的一致伪概周期函数，

$$|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)|\leqslant\eta(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|),\forall(t,x_i,y_i)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R},\quad i=1,2$$

若 $q>0$、$4M(2+\frac{3}{q})+2\eta<1$，或 $q<-4$ 和 $4M(1+\frac{3-q}{q+4})+2\eta<1$，其中 $M=\|p(t)\|$，方程(1)有唯一的伪概周期率。

证明 对任意 $\varphi\in PAP$，考虑方程：

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)+p(t)\varphi(t-1))=qx\left(2\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)+g(t,\varphi(t),\varphi[t]) \tag{9}$$

据定理1，方程(9)有唯一的伪概周期解：

$$x_\varphi(t)=-p(t)\varphi(t-1)+(c_{2n}+p(2n)\varphi(2n-1))+D_{2n}(t-2n)$$
$$+\frac{1}{2}qc_{2n}(t-2n)^2+\int_{2n}^{t}\int_{2n}^{s}g(\sigma,\varphi(\sigma),\varphi[\sigma]\,d\sigma ds,\forall 2n-1\leqslant t<2n+1$$

定义算子 $F:PAP\to PAP$，$F(\varphi)=x_\varphi$，则对任意 φ_1、$\varphi_2\in PAP$，有：

$$|(F\varphi_1)(t)-(F\varphi_2)(t)|\leqslant 4M\left(1+(3+|q|)\left(\frac{|k_1|}{1-|\lambda_1|}+\frac{|k_2|}{|\lambda_2|-1}\right)\right)\|\varphi_1-\varphi_2\|+2\eta\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

在定理的假设中，$\|F\varphi_1-F\varphi_2\|<\|\varphi_1-\varphi_2\|$，这表明 F 是压缩算子，由不动点定理可得 F 有不动点，即方程(1)有伪概周期解。方程(1)有伪概周期解的唯一性的证明同定理1。

参考文献：

[1] Cooke K L, Wiener J. Retarded Differential Equations with Piecwise Constant Delay[J]. J. Math. Anal. Appl., 1984, 99: 265–297.

[2] Shan S M, Wiener J. Advanced Differential Equations with Piecewise Constant Argument Deviations[J]. Internat. J. Match. Soc., 1983, 6: 671–703.

[3] Cooke K L, Wiener J. A Survey of Differential Equation with Piecewise Constant Argument[M]. Berlin: Springer Verlag, 1991.

[4] Papaschinopoulos G. On Asymptotic Behavior of the Solutions of a Class of Perturbed Differential Equations with Piecewise Constant Argument[J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, 185: 490–500.

[5] 袁荣. 二阶中立型逐段常变量微分方程概周期解的存在性[J]. 中国科学, 1997, A(27): 873–881.

[6] Li Z X, He M K. The Existence of Almost Periodic Solution of Second Order Neutral Differential Equations with Piecewise Constant Argument[J]. Northeast. Math. J., 1999, 15(3): 369–378.

[7] Yuan R. Pseudo-almost Periodic Solutions of Second-order Neutral Delay Differential Equations with Piecewise Constant Argument[J]. Nonlinear Anal., 2000, 41: 871–890.

[8] 王鑫. 微分方程研究中的几个问题[D]. 长沙: 国防科技大学, 2003.

[9] Zhang C. Pseudo-almost Periodic Functions and their Applications[D]. The University of Western Ontario, 1992.