

粘弹性界面裂纹相似界面单元聚缩解

刘 甫,任钧国,周建平

(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:提出了粘弹性界面裂纹分析的相似界面单元聚缩解法。该方法在裂纹尖端附近划分相似界面单元,多层相似单元形成一个子结构;然后利用相似界面单元具有类似刚度矩阵的特点,将子结构内的大量自由度聚缩后再求解。作为算例,求解了双粘弹性材料和弹-粘弹性材料矩形板单边裂纹的拉伸问题。

关键词:界面元;粘弹性;相似单元;聚缩

中图分类号:034 **文献标识码:**A

The Condensation Method with Similar Shape Element for the Solution of Viscoelastic Interface Crack

LIU Fu, REN Jun-guo, ZHOU Jian-ping

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The condensation method for the analysis of viscoelastic interface crack with similar shape element is put forward. By this method, similar shape elements are generated near the crack tip, forming a substructure with a large number of similar shape elements. And then the large number of freedom degrees in substructure is condensed out. Identity of stiffness matrix between the similar shape elements is used fully during the process of condensation. The tension of bi-viscoelastic and elastic-viscoelastic material rectangle plate with the single edge crack is solved to illustrate the use of this method.

Key words: interface element; viscoelastic; similar shape element; condensation

在裂纹问题的研究中,一般通过在裂纹尖端采用奇异元等特殊单元和对常规单元进行技术处理^[1,2]两种途径来提高计算精度。对于粘弹性界面裂纹,由于其奇异因子与界面材料的常数有关,且与时间相关,已不再是简单的 $1/2$,难以构造对应的奇异单元,因此用常规单元加密剖分成为解决此类问题的有效手段。但是将裂纹尖端附近的单元网络划分很细,不仅占用计算机内存,而且不便于数据准备。为了解决这些问题,在裂纹尖端附近构造了新型相似界面单元,将多层相似界面单元形成一个子结构来求解。推导了相似界面单元刚度矩阵的相似关系,并利用这一关系将子结构内的大量自由度进行聚缩并求解。算例表明,该方法能以很好的计算效率获得理想的精度。

1 相似界面单元的构造

图1中平面问题界面裂纹, x 轴为界面,其上下方分别为材料1、材料2。

界面元法是一种非常适合于研究界面裂纹这类不连续介质问题的数值方法^[3,4],具有较高的应力精

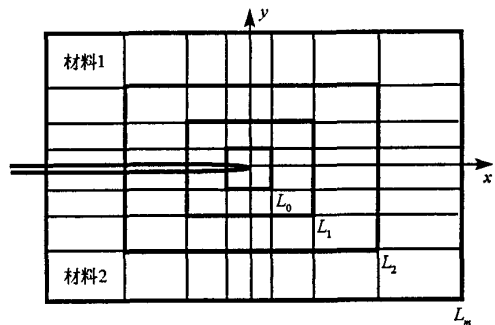


图1 裂尖附近相似单元划分

Fig.1 Similar shape element split near crack tip

• 收稿日期:2004-12-25

基金项目:国家杰出青年科学基金资助项目(19925209)

作者简介:刘甫(1966—),男,副教授,在职博士生。

度。但是如果采用常见的围绕裂尖进行三角形区域划分,将得不到单元的相似性,为了使上层与下层相似单元的刚度矩阵有简单的关系,可以如图中所示构造相似单元:

围绕裂纹尖端划分四边形子区域 L_0 ,以裂纹尖端为相似中心, x 、 y 方向的比例常数分别取为 c_x 、 c_y (c_x 、 c_y 均大于 1),作 L_0 的相似四边形 L_1 ,同样,以 $(c_x^2, c_y^2), \dots, (c_x^m, c_y^m)$ 为比例常数作相似四边形 L_2, \dots, L_m 。两个四边形之间为一层,在每层中以相同方法划分块体——界面单元。这样在裂纹尖端附近区域内包含了很多的界面单元,因而可以得到较高的精度。

2 相似界面单元的刚度矩阵

界面单元刚度阵为 6×6 矩阵^[5]:

$$k = \int_j N^* T L^{(1)T} C^{-1} L^{(1)} N^* ds \quad (1)$$

式中,坐标转换矩阵 $L = \begin{bmatrix} \cos(n, x) & \cos(n, y) \\ \cos(s, x) & \cos(s, y) \end{bmatrix}$,弹性矩阵 $C = A_1^{-1} + A_2^{-1}$, $A_i = \frac{D_i G_i(0)}{h_i}$ ($i = 1, 2$), $G(0)$ 为 $t = 0$ 时刻的材料松弛模量, h 为块体元形心到界面的距离。

$$\text{平面应力: } D_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(1+\nu_i)} \end{bmatrix} \quad \text{平面应变: } D_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu_i^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(1+\nu_i)} \end{bmatrix}$$

设水平方向第 0 层的界面单元刚度阵为 K^0 ,可以推导出水平方向第 i 层的刚度阵 K^i 与 K^0 中的元素有下列简单关系:

$$k_{13}^i = k_{34}^i = C_y^i k_{13}^0 = C_y^i k_{34}^0 \quad (2)$$

$$k_{16}^i = k_{46}^i = C_y^i k_{16}^0 = C_y^i k_{46}^0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{33}^0 = k_{33y}^0 + k_{33x}^0 \\ k_{66}^0 = k_{66y}^0 + k_{66x}^0 \\ k_{36}^0 = k_{36y}^0 + k_{36x}^0 \end{array} \right.$$

记

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{33}^i = C_y^{2i} k_{33y}^0 + k_{33x}^0 \\ k_{66}^i = C_y^{2i} k_{66y}^0 + k_{66x}^0 \\ k_{36}^i = C_y^{2i} k_{36y}^0 + k_{36x}^0 \end{array} \right.$$

则

其余各刚度元素相等。

若 K^0 为垂直方向第 0 层的界面单元刚度阵, k^i 为垂直方向第 i 层的刚度阵,则可以推导出它们有下列简单关系:

$$k_{13}^i = k_{34}^i = C_x^i k_{13}^0 = C_x^i k_{34}^0 \quad (3)$$

$$k_{16}^i = k_{46}^i = C_x^i k_{16}^0 = C_x^i k_{46}^0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{33}^0 = k_{33y}^0 + k_{33x}^0 \\ k_{66}^0 = k_{66y}^0 + k_{66x}^0 \\ k_{36}^0 = k_{36y}^0 + k_{36x}^0 \end{array} \right.$$

记

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{33}^i = k_{33y}^0 + C_x^{2i} k_{33x}^0 \\ k_{66}^i = k_{66y}^0 + C_x^{2i} k_{66x}^0 \\ k_{36}^i = k_{36y}^0 + C_x^{2i} k_{36x}^0 \end{array} \right.$$

则

其余各刚度元素相等。

3 方程聚缩

四边形 L_m 区域内的各相似界面元可以组成一个超级单元,但过多的自由度将给计算带来不便。

下面通过聚缩方法减少自由度数。

粘弹性增量界面单元的支配方程为：

$$K\Delta U(t_i) = \Delta R(t_i) \tag{4}$$

$$\text{式中}^{[5]}\Delta R(t_i) = \sum_e C_e^T \left(\iint_{\Gamma_e} N^T \Delta \bar{p} ds \right) + \sum_j C_j^T \left[\iint_{\Gamma_j} N^{*T} L^{(1)T} \Delta \sigma_r(t_i) ds \right]. \tag{5}$$

$\Delta \sigma_r(t_i) = C^{-1} [A_1^{-1} \Delta B_1(t_i) + A_2^{-1} \Delta B_2(t_i)]$ 是粘弹材料模量松弛引起的应力增量。

$$\Delta B_1(t_i) = D_1 \sum_{j=1}^{i-1} \left[\sum_{m=1}^N G_{1m} e^{-\eta_{1m}(t_i-t_j)} (e^{-\eta_{1m}\Delta t} - 1) \right] \frac{\Delta \delta^{*(1)}(t_j)}{h_1}.$$

$$\Delta B_2(t_i) = D_2 \sum_{j=1}^{i-1} \left[\sum_{m=1}^N G_{2m} e^{-\eta_{2m}(t_i-t_j)} (e^{-\eta_{2m}\Delta t} - 1) \right] \frac{\Delta \delta^{*(2)}(t_j)}{h_2}.$$

N^* 为界面单元的形函数, $\Delta \delta^{*(1)}(t_j)$ 、 $\Delta \delta^{*(2)}(t_j)$ 为界面单元微段的变形增量。它可由下列两式得到：

$$\Delta \sigma(t_i) = -C^{-1} L^{(1)} [N^{(1)} \Delta u_g^{(1)}(t_i) - N^{(2)} \Delta u_g^{(2)}(t_i)] + \Delta \sigma_r(t_i)$$

$$\Delta \delta^{*(i)}(t_i) = D_i^{-1} \frac{h_i \Delta \sigma^{(i)}(t_i)}{G_i(0)} - \sum_{j=1}^{i-1} \left[\sum_{m=1}^N G_{im} e^{-\eta_{im}(t_i-t_j)} (e^{-\eta_{im}\Delta t} - 1) \right] \frac{\Delta \delta^{*(i)}(t_j)}{G_i(0)}$$

设下标 a 表示 L_{m-1} 内的界面单元, 下标 b 表示第 L_m 层和 L_m 所围区域内 x, y 轴上的界面单元。则上式可改写为：

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_a(t_i) \\ \Delta u_b(t_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta R_a(t_i) \\ \Delta R_b(t_i) \end{Bmatrix} \tag{6}$$

经过聚缩处理可以消除 Δu_a , 从方程(6)中的第1式得

$$\Delta u_a(t_i) = K_{ab}^{-1} [\Delta R_a(t_i) - K_{ab} \Delta u_b(t_i)] \tag{7}$$

代入到方程(6)中的第2式, 从而得到一个阶数大大降低的聚缩方程组：

$$K^* \Delta u_b(t_i) = \Delta R_b^*(t_i) \tag{8}$$

其中：

$$K^* = K_{bb} - K_{ba} K_{aa}^{-1} K_{ab} \tag{9a}$$

$$\Delta R_b^*(t_i) = \Delta R_b - K_{ba} K_{aa}^{-1} \Delta R_a(t_i) \tag{9b}$$

由(8)可以得出 $\Delta u_b(t_i)$, 再利用(7)可得 $\Delta u_a(t_i)$

以给定的聚缩条件得到裂纹尖端附近区域相似形状单元的刚度矩阵后, 按结构的结点编码同其它界面单元结合, 就得到了结构的总刚度矩阵。

从上面的分析可以看出, 粘弹性问题和弹性问题的聚缩求解最大的不同在于每一增量步中, 由聚缩方程求解后, 仍然需要求出被聚缩掉的单元位移, 因为在下一增量步中的载荷计算需要用到它。看起来似乎没有减少工作量, 但是通过聚缩处理大大降低了求解方程组的维数, 因此, 这种方法大大缩短了计算时间。

4 算例及结论

在固体火箭发动机的结构完整性分析中, 脱粘是一个比较突出的问题。脱粘可能发生在包覆层与药柱或钢外壳与包覆层的界面上, 因此研究双粘弹性和弹-粘弹性界面裂纹就非常有意义。

4.1 双粘弹性材料矩形板单界面裂纹

受均匀拉伸的具有单界面裂纹的矩形板(见图2)中, 材料1、2均为粘弹性, 材料特性：

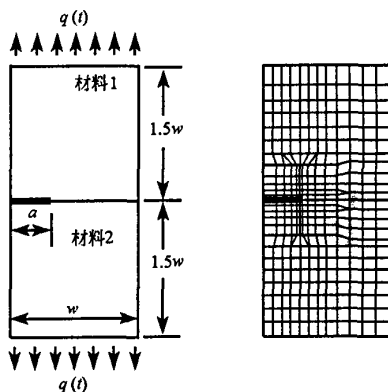


图2 计算模型及单元划分

Fig.2 Computing model and element mesh

$$E_1(t) = 50 + 100e^{-\frac{t}{2}} + 50e^{-\frac{t}{4}} \text{ (MPa)}$$

$$E_2(t) = 25 + 50e^{-\frac{t}{2}} + 25e^{-\frac{t}{4}} \text{ (MPa)}$$

泊松比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 阶跃载荷 $q(t) = 1000H(t)$ (MPa), 裂纹长度 $a = 0.004\text{m}$, 板宽 $w = 0.01\text{m}$ 。

在裂纹尖端附近取合适大小的初始子区域 L_0 , 以合适的比例常数 C_x, C_y 划分相似单元, 构成一个超级单元(图 2 中裂纹周围加粗线条围成的四边形), 结构的其余部分可采用四边形块体元剖分, 与超级单元的连接处可灵活采用三角形或四边形块体元。

应力强度因子 K_1, K_2 的计算结果分别见图 3 和图 4, 与 Ansys 有限元的结果吻合得很好。

4.2 弹-粘弹性材料矩形板单边界面裂纹

在图 2 的结构中, 若将材料 1 换成弹性材料, $E_1 = 200\text{MPa}$, 其弹性模量与 4.1 中粘弹性材料 1 的玻璃模量相同, 其余条件不变, 相应的应力强度因子 K_1, K_2 结果分别如图 3 和 4 中虚线所示。

两个算例的结果表明:

(1) 粘弹性相似界面单元的聚缩解具有精度高、输入数据少、计算花费时间少的优点。

(2) 由于材料的蠕变, 裂纹面位移随时间而逐渐增长, 从而粘弹性材料界面裂纹的应力强度因子随时间的增加而增长, 直至达到稳态。

(3) 界面裂纹即使只受 I 型载荷, K_2 一般也不为零。对比图 3、4 可以看出, 材料 1 分别为玻璃模量与弹性模量相同的粘弹性材料与弹性材料时, 双粘弹性材料界面裂纹的 K_1 比弹-粘弹性材料的高, 而 K_2 则要小。可见, 材料的粘弹性能对裂纹的应力强度因子有较大的影响。

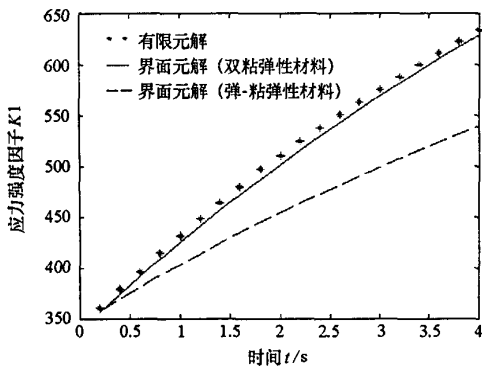


图 3 应力强度因子 K_1 与时间关系

Fig.3 Relationship between SIF K_1 and time

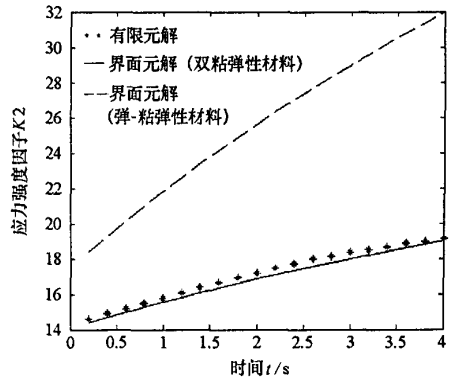


图 4 应力强度因子 K_2 与时间关系

Fig.3 Relationship between SIF K_2 and time

参考文献:

- [1] 李有堂, 俞焕然, 龚俊. I 型裂纹问题的相似形状单元聚缩解法[J]. 甘肃工业大学学报, 1997, 23(1).
- [2] Zhang X Q, Qi L. Research on Complicated Dam Foundation during Excavation with Three-dimension Viscoelastic Plastic Condensed FEM[J]. Transactions of Tianjin University, 2000, 6(1).
- [3] 方义琳, 卓家寿, 章青. 具有任意形状单元离散模型的界面元法[J]. 工程力学, 1998, 15(2): 27-37.
- [4] Zhou J S, et al. Interface Stress Element Method for Deformable Body with Discontinuous Medium Such as Rock Mass[A]. Proc. of 8th ISRM, A. A. BALKEMA 1995, Tokyo, 939-941.
- [5] 刘甫, 任钧国, 周建平. 粘弹性增量界面元法[J]. 国防科技大学学报, 2004, 26(5).

