文章编号:1001-2486(2005)04-0121-04

多属性决策中的线性组合赋权方法研究*

刘靖旭,谭跃进,蔡怀平
(国防科技大学 信息系统与管理学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:权向量的确定是多属性决策中一个重要问题,线性组合赋权方法是解决该问题的一个有效途径。对线性组合赋权的求解问题进行了一般性的描述,并根据求解所用信息的不同将求解方法分为四类,阐述了每类方法常用的求解思路和原则,进一步分析了不同类别方法的特点。对求解方法进行分类,有利于对不同求解方法本质和特性的了解,可以为不同组合赋权方法的应用提供参考。

关键词:多属性决策;线性组合赋权;求解方法

中图分类号:C934 **文献标识码**:A

The Study of the Methods of the Linear Combination Weighting for Multiple Attribute Decision-making

LIU Jing-xu, TAN Yue-jin, CAI Huai-ping
(College of Information System and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The determination of weight vectors is the key problem for multiple attribute decision making. The linear combination weighting is an effective way to do it. The general description of the linear combination weighting problem is provided. Based on the information used to solve the problem, the solution methods are classified as four different classes. The fundamental idea for each class is demonstrated. The characteristics of each class are analyzed. This is useful to understand the different methods, and can provide references to the practical use of the methods.

Key words: multiple attribute decision making; linear combination weighting; solution methods

在多属性决策中,各属性的相对重要程度即属性的权重对评价结果有重要的影响,合理地确定权重是多属性决策的一个核心问题[1]。权重的确定方法有很多,按照原始数据的来源基本上可分为两类,即主观赋权法和客观赋权法。主观赋权法根据专家及决策者的经验判断不同属性的重要程度,常用的方法有德尔斐法、层次分析法、环比法等。客观赋权法是根据决策方案的属性值的特性来确定,如熵值法、主成分分析法、多目标最优化方法、变异系数法等。主观赋权法体现了决策者对属性相对重要性的认识,但易受决策人员知识、经验等方面的影响;客观赋权法具有对已知信息进行客观处理的优点,但易受原始数据的影响,且忽略了决策者的偏好程度。无论是主观赋权评价法,还是客观评价法,都有其自身的缺陷。因此,一些学者研究将主观赋权法与客观赋权法综合起来,以得出更为合理、科学的评价结果。

主客观组合赋权法的两种常用公式是:$q_j = \alpha_j w_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j$和$q_j = \delta\alpha_j + (1-\delta)w_j$。其中,$0 \leqslant \delta \leqslant 1$,$q_j$为第$j$个属性的组合权值,$\alpha_j$为第$j$个属性的客观权值,$w_j$为第$j$个属性的主观权值。前者的组合实质上是乘法合成的归一化处理,该方法使用于指标个数较多、权数分配比较均匀的情况[2]。后者实质上是线性加权[3],称为线性加权组合赋权方法。当决策者对不同赋权方法存在偏好时,δ能够根据决策者的偏好信息来确定;当决策者对不同赋权方法没有明显的偏好时,需要用其他的方法来确定不同赋权方法的相对重要程度,本文正是对多种赋权方法得到的权向量的线性加权组合方法进行了探讨。

* 收稿日期:2005-04-02
基金项目:国家部委资助项目
作者简介:刘靖旭(1978—),女,博士生。

1 线性加权组合赋权问题的描述

设多属性决策问题[1,5,15,18]的方案集为 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$,属性(或指标)集为 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$,决策矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,a_{ij} 表示第 i 个方案 S_i 对第 j 个属性 P_j 的属性值,设 a_{ij} 为经过标准化处理后的值,即 $0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$。权向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 表示属性之间的相对重要程度,$0\leqslant w_j\leqslant 1$,$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$,$w_j$ 是属性 P_j 的权值。假设有 s 种赋权方法对 n 个属性赋权,第 k 种方法得到的权向量为 $\boldsymbol{w}_k=(w_{k1},w_{k2},\cdots,w_{kn})$,$w_{kj}$ 为第 k 种方法给第 j 个属性所赋的权值。线性加权组合赋权方法便是按照一定的原则,求取组合权向量 $\boldsymbol{w}_0$:

$$\boldsymbol{w}_0=(w_{01},w_{02},\cdots,w_{0n})=\theta_1\boldsymbol{w}_1+\theta_1\boldsymbol{w}_2+\cdots+\theta_s\boldsymbol{w}_s \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\sum_{i=1}^{s}\theta_i=1,0\leqslant\theta_i\leqslant 1 \tag{2}$$

组合权系数向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_s)$,$\theta_i$ 是对第 s 种赋权方法相对重要程度的度量,称为原权向量的权系数。可见,线性组合赋权方法的关键在于如何求取组合权系数向量。为了下一步的讨论,先对一些概念进行定义。

定义1 称集合 $W^n=\{\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)\mid 0\leqslant w_j\leqslant 1,\sum_{j=1}^{n}w_j=1\}$ 为 n 维权向量集。则由 s 种赋权方法所得到的权向量的集合 $W=\{\boldsymbol{w}_k\mid k=1,2,\cdots,s\}\subset W^n$,且组合权向量 $\boldsymbol{w}_0\in W^n$。

定义2 给定多属性决策问题的决策矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,对确定的权向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)\in W^n$,每个方案的综合评价值为:$Z_i(\boldsymbol{w})=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}w_j(i=1,2,\cdots,m)$,称 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{w})=(Z_1(\boldsymbol{w}),Z_2(\boldsymbol{w}),\cdots,Z_m(\boldsymbol{w}))$ 为多属性决策问题的评价值向量,称所有可能的评价值向量组成的集合为特定多属性决策问题的 m 维评价值向量集 $Z^m=\{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{w})\mid\boldsymbol{w}\in W^n\}$。则由 s 个赋权方法所得到的综合评价值向量的集合 $Z=\{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{w}_i)\mid\boldsymbol{w}_i\in W\}\subset Z^m$。

定义3[6,7] 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$ 为其按大小的排序。当 $x_i=x_{(r)}$ 时,定义变量 $r_i=r$,称元素 x_i 的秩为 r_i。当元素间不存在相等关系时,$(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列。当存在相等关系时,这些元素的秩等于没有等值出现时应有秩的平均值,如:若 $x_{(i)}=\cdots=x_{(j)}$,则 $x_{(i)},\cdots,x_{(j)}$ 所对应的元素的秩为:$(i+j)/2$。称序列 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的序号列。

定义4 由 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 组成的集合为 $X^n=\{\boldsymbol{x}\}$,n 维向量所对应的所有可能的序号列组成的集合为序号列集 $R^n=\{R\}$,则称 σ_n 是从集合 X^n 到集合 R^n 的一个秩映射,记作:$\sigma_n:X^n\to R^n$,它使得 X^n 中的每一个 n 维向量与 R^n 中的唯一的一个序号列相对应。

2 组合赋权方法的分类

对于一个具体的线性加权组合赋权问题,它对应着四个不同的集合:权向量集 W、评价值向量集 Z 以及这两个集合分别通过秩映射得到的序号列集 R_w、R_z:

$$R_w=\{\sigma_n(\boldsymbol{w})\mid\boldsymbol{w}\in W\}\quad R_z=\{\sigma_m(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{w}_i))\mid\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{w}_i)\in Z\} \tag{3}$$

因此,按照问题求解所使用数据的不同可以分为四类方法。

(1)基于权向量集 W 的求解[8]

基于权向量集 W 的组合赋权问题求解,一般是通过定义 n 维权向量集 W^n 上的两个元素的贴近度,用贴近度的大小来度量两个权向量的相关程度。度量两个非负向量贴近度的方法很多,此处给出通过距离来定义的贴近度。一般定义距离如下[5],对于任意的权向量 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\in W^n$,两者之间的距离为:$d_a(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)=(\sum_{j=1}^{n}\mid w_{1j}-w_{2j}\mid^a)^{\frac{1}{a}}$,则可定义 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ 的贴近度为:$\lambda(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)=1-d_a(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)$,在此定义下,

任一原权向量 $w_k \in W$ 的权系数 θ_i 可以用下式计算：$\theta_k = \sum_{i=1,i\neq k}^{s}\lambda(w_i,w_k)\Big/\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1,i\neq k}^{s}\lambda(w_i,w_k)$。

上式通过原权向量与其它向量总贴近度的相对大小来度量赋权方法的相对重要性，另外一种常用的方法是通过构造优化模型，使得组合权向量与原权向量尽可能贴近，然后进行组合权向量系数的求解。如在偏差最小意义下的优化模型为[9]

$$\min\sum_{k=1}^{s}d_1(w_0,w_k),\text{s.t.}\sum_{i=1}^{s}\theta_i=1,0\leqslant\theta_i\leqslant 1 \tag{4}$$

(2)基于评价值向量集 Z 的求解

基于评价值向量的求解与上面的方法类似，也可分为两种。一种是定义 Z 上的两个元素的贴近度度量，用每种赋权方法所得到的评价值向量与其它评价值向量的贴近度对该方法的重要程度进行衡量，贴近度越大，该赋权方法越重要，原权向量的权系数越大。另外便是通过多目标规划来进行求解，一般是在条件(2)的约束下建立目标函数，然后进行组合权系数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的求解。目标函数建立的出发点主要有：组合权向量对应的评价值向量与原评价值向量的距离尽可能小[10~12]；组合权向量对应的各方案的综合评价值的离差尽可能大[13,14]；组合权向量对应的所有方案的评价值都尽可能大[15,16]；所有方案到理想方案的距离和尽可能小[17]；使所有属性对所有的方案的总离差达到最大[18]等。前两者的目标函数的示例如下：

$$\min\sum_{k=1}^{s}d_a(Z(w_0),Z(w_k));\ \max\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(Z_i(w_0)-Z_k(w_0))^2。$$

(3)基于序列号集 R_w、R_z 的求解[1]

基于序列号集 R_w 或 R_z 的求解，一般是通过定义序号列集 R^n 或 R^m 上的两个序号列的一致性度量，用某一赋权方法所对应的序号列与其他方法的序号列的一致性，来衡量该赋权方法的重要性。在非参数统计中，用 Spearman 秩相关系数来进行两个随机量的正相关的判断[5,7]。对于任意的序号列 $R_1,R_2\in R^n$，两者之间的 Spearman 秩相关系数为：

$$\rho_{12}=1-\frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{j=1}^{n}(r_{1j}-r_{2j})^2 \tag{5}$$

求解原则主要有两种：一种是先找出一个参考序号列，用原序号列与该列的一致性系数归一化后的值，作为原序号列对应的赋权方法重要性的度量[2]；另外一种是，计算原序号列内的每一序号列与其它序号列的平均一致性，一致性大则重要程度高[8]。第 k 种赋权方法的平均一致性：$\rho_k=\frac{1}{s-1}\sum_{i=1,i\neq k}^{s}\rho_{ki}$，用 ρ_k 的归一化结果来表示第 k 种赋权方法相对于其它方法的重要程度：$\theta_k=\rho_k\Big/\sum_{i=1}^{s}\rho_i$。

另外，文献[7]中定义了两个序号列间的距离：$d(R_1,R_2)=(\sum_{j=1}^{n}|r_{1j}-r_{2j}|^a)^{\frac{1}{a}}$，在此距离定义下，可以用贴近度来确定不同评价方法的相对重要性，原理同第一类方法，此处不再赘述。

3 不同类别方法的特点

不同类别的方法由于求解所用信息的不同而具有不同的特点，主要如下：

第一类方法使得组合权向量与原权向量具有较大的贴近度。由于只使用权重信息，求解结果不受方案的具体属性值的影响，方案的多少、方案属性值的大小变化不影响求解的结果；用权向量的贴近度进行不同赋权方法重要性的度量，意义比较明确；缺点是当对象属性数目变化时，组合权重缺乏稳定性。

第二类方法在评价值向量集内进行求解，用不同赋权方法的评价结果来确定不同方法的重要程度。既使用原权向量的信息，又使用了方案的属性值信息，可以直接跟方案的最终排序相关联；缺点是受方案数目和属性值的影响，当这些因素改变时，可能会得到不同的组合权向量；另外，当使用方案的评价值进行多目标规划求解时，所得权系数的意义不是很明确。

第三类方法使得组合权的排序与原始权的排序尽可能一致。与第一类方法相似之处是，它只利用

权重的信息,求解结果不受方案的多少、方案属性值的大小变化的影响,组合权系数的意义比较明确,易受属性数目变化的影响;不同之处是,它只利用了属性权重的排序值,“粒度”较大,不能充分体现不同权向量间的“距离”,当两个权序列完全一致时,它们所得到的方案的排序结果可能会出现不一致,甚至相互矛盾[16,19]。

第四类方法直接跟方案的最终排序相关联,能够很好地解决不同赋权方法的方案排序结果的不一致性;只利用了多个方案评价值的排序值,“粒度”较大;同时也受方案数目和属性值大小变化的影响;不同评价方案结果的一致性,并不一定能保证权向量的一致性,完全不一致的权向量得到的方案的排序结果可能具有较好的一致性[22]。

可见,不同类型方法具有一些不同的特征,在运用这些方法进行具体问题求解时,应综合考虑具体问题的需求和不同方法的优缺点,选择可行的、有效的方法。

4 结 论

本文对线性组合赋权方法的求解问题进行了分析,按照求解所用的信息的不同对其进行分类,对每类方法常用的求解思路进行了描述,并分析了不同类别方法的特点。对其进行分类,有利于对不同求解方法的了解,可以为不同组合赋权方法的应用提供参考。在对不同类型方法进行具体运用时应综合考虑不同组合方法的特点,以及决策者的决策需求,选择适用于具体的多属性决策问题的方法。

当然,本文并不能囊括所有的线性组合赋权方法,而是侧重于对不同类型方法的求解思路或原则的描述。文中对于向量集内两个向量的距离、贴近度、一致性等的定义,也只是示例性的。在解决具体问题时,可以根据需求选择这些概念的其他度量方法。

本文只是在各种赋权方法可以组合的假定下,对求解问题进行了综述,而对与组合赋权相关的其它问题,由于篇幅所限未做进一步的讨论,如组合前各赋权方法的一致性检验、组合权系数的合理性检验等。对于组合赋权法的事前检验和事后检验,目前主要有对不同赋权方法的一致性进行检验[2]和对不同赋权方法的相容性进行检验[21]等。本文只是从一个角度对线性组合赋权问题进行了一些探讨,对于组合赋权方法这一课题,还有许多问题亟待研究。

参 考 文 献:

[1] 李登峰. 模糊多目标多人决策和对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
[2] 曾宪报. 组合赋权法新探[J]. 预测, 1997, 05.
[3] 宋海洲. 客观权重与主观权重的权衡[J]. 技术经济与管理研究, 2003,03.
[4] 陈国宏, 陈衍泰, 李美娟. 组合评价系统综合研究[J]. 复旦学报(自然科学版), 2003,42(5).
[5] 宣家骥. 多目标决策[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1989.
[6] 孙山泽. 非参数统计讲义[M]. 北京: 北京大学出版社,2000: 6-12.
[7] 何俊. 多属性决策问题的一种综合排序法研究[J]. 军事系统工程, 1999,04.
[8] 宋光兴. 基于决策者偏好及赋权法一致性的组合赋权法[J]. 系统工程与电子技术, 2004,09.
[9] 陈耀辉. 最优组合赋权的模糊综合评判模型及其在企业信用风险评价中的应用[J]. 南航学报. 1999,01.
[10] 刘喜华. 投资方案多属性决策组合评价法研究[J]. 山东建筑工程学院学报, 2001,03.
[11] 毛定祥. 一种最小二乘意义下主客观评价一致的组合评价方法[J]. 中国管理科学, 2002,04.
[12] 徐泽水. 多属性决策的组合赋权方法研究[J]. 中国管理科学, 2002,04.
[13] 王居平. 科技期刊选订的最优组合赋权决策方法研究[J]. 情报学报, 2003,06.
[14] 陈华友. 多属性决策中的一种最优组合赋权方法研究[J]. 运筹与管理, 2003,04.
[15] 樊治平. 多属性决策中权重确定的主客观赋权法[J]. 决策与决策支持系统, 1997,04.
[16] 魏巍贤. 多目标权系数的组合赋值方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 1998,02.
[17] 汪泽焱. 一种基于熵的线性组合赋权法[J]. 系统工程理论与实践, 2003,03.
[18] 陈华友. 多属性决策中基于离差最大化的组合赋权方法[J]. 系统工程与电子技术, 2004,02.
[19] 徐小湛. 多属性决策中的代理权重[J], 四川大学学报, 2002,08.
[20] 冯翱. 多指标系统分析及应用[J]. 小型微型计算机, 2000,05.
[21] 陈国宏. 基于方法集的综合评价方法集化研究[J]. 中国管理科学, 2004,02.
[22] Xu X Z. A Note on the Subjective and Objective Integrated Approach Todetermine Attribute Weights[J]. European Journal of Operational Research. 2004: 530-532.