

一类非线性动力系统的时滞反馈分叉控制*

钱长照¹ 李克安²

(1. 湖南大学 工程力学系 湖南 长沙 410082; 2. 湖南理工学院 湖南 岳阳 411400)

摘要 对时滞控制作用下的参数激励 van der Pol-Duffing 方程进行了研究,着重研究了时滞参数对该类参数激励系统的 1/2 亚谐共振-主参数共振分叉响应控制。首先采用摄动法从理论上推导出时滞动力系统的分叉响应方程,再采用数值模拟的方法研究了时滞参数对系统分叉响应的影响。研究结果表明,适当选取时滞参数,不仅可以改变分叉响应曲线的拓扑形态,还可以平移分叉响应曲线,即使其分叉提前或滞后,还能同时满足这两种要求。

关键词 摄动法;分叉控制;时滞动力系统

中图分类号:O322 文献标识码:A

Bifurcation Controlling of a Nonlinear Dynamics System with Time-delays Feedback

QIAN Chang-zhao¹, LI Ke-an²

(1. Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 411400, China)

Abstract The van der Pol-Duffing equation, excited under the parameters with two time delays, is studied. The main aim is to study 1/2 subharmonic-primary parametrical resonance bifurcation of this system. Perturbation method is used to obtain the bifurcation equation with time-delays, and numerical method is utilized to analyze the effect of time-delays on the steady state response. The research indicates that 1/2 subharmonic-primary parametrical resonance bifurcation can be well controlled by time-delays feedback.

Key words perturbation method; bifurcation controlling; dynamics of nonlinear systems involving time delays

分叉与混沌一直都是非线性动力学研究的重要课题,许多科学工作者在这些方面做了大量的研究,对于混沌的控制研究也取得比较成熟的成果,时滞反馈控制已成为控制混沌的主要方法之一^[1]。当前,非线性系统的分叉控制在国际上也正在形成一个专门的、全新的研究方向。文献[2]对分叉控制的理论、方法和应用前景已经作了详尽的叙述。文献[3,4]对动力系统的时滞反馈控制进行了研究。

本文研究非线性动力系统

$$\ddot{x} + \epsilon(\mu - \beta x^2)\dot{x} + \omega^2 x + \epsilon\alpha x^3 + \epsilon f x \sin \Omega t = 0 \quad (1)$$

的时滞反馈控制。事实上,动力系统(1)含有丰富的非线性动力行为,已有科学工作者对其分叉性质做了研究^[5]。本文研究的目的是设计线性时滞参数,对其系统的 1/2 亚谐共振-主参数共振分叉响应进行控制。受控动力系统可以描述为

$$\ddot{x} + \epsilon(\mu - \beta x^2)\dot{x} + \omega^2 x + \epsilon\alpha x^3 + \epsilon f x \sin \Omega t = \epsilon [g_p x(t - \tau_1) + g_d \dot{x}(t - \tau_2)] \quad (2)$$

1 平均方程和局部分叉分析

采用多尺度法来获得系统(2)的平均方程,设系统(2)具有下列形式的解

$$x(t, \epsilon) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (3)$$

* 收稿日期 2005-04-19

基金项目 国家自然科学基金资助项目(10472029)

作者简介 钱长照(1977—),男,博士生。

这里 $T_0 = t$ 为快变时间尺度, $T_1 = \varepsilon t$ 为慢变时间尺度。

本文只研究 $1/2$ 亚谐共振-主参数共振情况下的响应和分叉,以及时滞参数对该系统的分叉控制。在这种共振情况下, $\omega^2 = \Omega^2/4 + \varepsilon\sigma$, 这里 σ 为调谐参数。为便于分析,令 $\Omega = 2$ 。将(3)式代入方程(2),并令等式两边 ε 同次幂系数相等,得到摄动方程

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (4)$$

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \mu D_0 x_0 + \alpha x_0^2 D_0 x_0 - f x_0 \cos 2T_0 - \beta x_0^3 - 2\sigma x_0 + g_p x_0(t - \tau_1) + g_d D_0 x_0(t - \tau_2) \quad (5)$$

由多尺度方法^[6]可得方程(2)一阶近似解

$$x_0 = a \cos(t + \theta) + O(\varepsilon) \quad (6)$$

振幅 a 和相位角 θ 由极坐标形式的平均方程控制:

$$\begin{cases} \frac{da}{dT_1} = -\frac{1}{2}\mu a + \frac{1}{8}\beta a^3 - \frac{1}{2}g_p a \sin \tau_1 + \frac{1}{2}g_d a \cos \tau_2 + \frac{1}{4}fa \sin 2\theta \\ a \frac{d\theta}{dT_1} = \sigma a - \frac{1}{2}g_p a \cos \tau_1 - \frac{1}{2}g_d a \sin \tau_2 + \frac{3}{8}aa^3 + \frac{1}{4}fa \cos 2\theta \end{cases} \quad (7)$$

由稳态解条件 $\frac{da}{dT_1} = \frac{d\theta}{dT_1} = 0$, 在方程(7)中消除 θ 得分叉方程

$$\left(\frac{1}{2}\mu_e - \frac{1}{8}\beta a^2\right)^2 a^2 + \left(\sigma_e + \frac{3}{8}aa^2\right)^2 a^2 = \frac{1}{16}f^2 a^2 \quad (8)$$

式中

$$\mu_e = \mu + g_p \sin \tau_1 - g_d \cos \tau_2, \quad \sigma_e = \sigma - \frac{1}{2}g_p \cos \tau_1 - \frac{1}{2}g_d \sin \tau_2 \quad (9)$$

显然,平均方程(7)总是存在零解 $a = 0$ 。又由分叉方程(8)可知该方程会产生3种可能的解,除零解 $a = 0$ 外,其他解可由下列代数方程的根给出:

$$(9a^2 + \beta^2)a^4 + 6\alpha\sigma_e - 2\beta\mu_e)a^2 + 16\left(4\sigma_e^2 + \mu_e^2 - \frac{1}{4}f^2\right) = 0 \quad (10)$$

对方程(10)的可能解进行分析:

- (i) $4\sigma_e^2 + \mu_e^2 - \frac{1}{4}f^2 > 0, 12\alpha\sigma_e - 2\beta\mu_e > 0$, 方程(10)存在唯一零解;
- (ii) $4\sigma_e^2 + \mu_e^2 - \frac{1}{4}f^2 = 0, 12\alpha\sigma_e - 2\beta\mu_e \geq 0$, 方程(10)存在唯一零解;
- (iii) $4\sigma_e^2 + \mu_e^2 - \frac{1}{4}f^2 = 0, 12\alpha\sigma_e - 2\beta\mu_e < 0$, 方程(10)可能存在两个实数解;
- (iv) $4\sigma_e^2 + \mu_e^2 - \frac{1}{4}f^2 < 0, (3\alpha\mu_e + 2\beta\sigma_e)^2 - \frac{f^2}{4}(9a^2 + \beta^2) < 0$, 方程(10)存在唯一零解;
- (v) $4\sigma_e^2 + \mu_e^2 - \frac{1}{4}f^2 < 0, (3\alpha\mu_e + 2\beta\sigma_e)^2 - \frac{f^2}{4}(9a^2 + \beta^2) = 0$, 方程(10)可能存在两个实数解;
- (vi) $4\sigma_e^2 + \mu_e^2 - \frac{1}{4}f^2 < 0, (3\alpha\mu_e + 2\beta\sigma_e)^2 - \frac{f^2}{4}(9a^2 + \beta^2) > 0$, 方程(10)可能存在三个实数解。

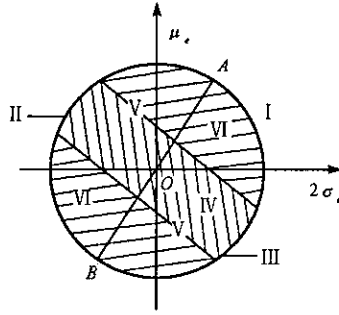
根据以上分析,可在参数平面 (σ_e, μ_e) 上画出全局分叉集,如图1所示。

由平均方程及分叉集可以看出,系统含有丰富的动力学分叉特性,且其分叉性质与时滞参数有关,也就是说,时滞参数的改变影响着分叉特性,适当选取参数可以消除或延迟系统产生的分叉行为。

2 零解的稳定性分析

为了便于研究零解的稳定性,将平均方程写成直角坐标形式

$$\begin{cases} \frac{du}{dT_1} = -\mu_e u + \left(\frac{f}{4} - \sigma_e\right)v + \frac{1}{2}(\alpha u - 3\beta v)(u^2 + v^2) \\ \frac{dv}{dT_1} = \left(\frac{f}{4} + \sigma_e\right)u - \mu_e v + \frac{1}{2}(3\beta u + \alpha v)(u^2 + v^2) \end{cases} \quad (11)$$

图1 参数平面 $(2\sigma_e, \mu_e)$ 上的分叉集Fig.1 The bifurcation set on the parametric plane $(2\sigma_e, \mu_e)$

系统(11)有一个零解 $(u, v) = (0, 0)$, 在零解处, 平均方程(11)的 Jacobi 矩阵为

$$D_w F|_{(u, v) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} -\mu_e & \frac{f}{4} - \sigma_e \\ \frac{f}{4} - \sigma_e & -\mu_e \end{bmatrix} \quad (12)$$

这里 $w = (u, v)^T$, 对应于零解的特征方程

$$\lambda^2 + 2\mu_e \lambda + \frac{1}{16}(16\sigma_e^2 + 4\mu_e^2 - f^2) = 0 \quad (13)$$

由方程(13)可以看出, 当 $\mu_e = 0, \sigma_e = \pm f/4$ 时, 零解的两个特征值都成为零, 因此该条件下零解可能发生余维 2 退化分叉。

由以上分析可以看出, 系统(1)(2)存在着非常丰富的非线性动力学行为, 其分叉方式也比较复杂。本文将用数值模拟的方法研究分叉响应曲线及时滞参数对这些分叉的控制。

3 局部分叉的数值模拟

为了便于分析, 将两个延迟时间表示为 $\tau_1 = \tau, \tau_2 = \phi + \tau$, 则参数 μ_e 和 σ_e 可以表示为

$$\mu_e = \mu + g_p \sin \tau - g_d \cos(\tau + \phi), \sigma_e = \sigma - \frac{1}{2}[g_p \cos \tau + g_d \sin(\tau + \phi)] \quad (14)$$

由方程(14)可得

$$(\mu_e - \mu)^2 + 4(\sigma_e - \sigma)^2 = g_p^2 + g_d^2 + 2g_p g_d \sin \phi \quad (15)$$

方程(15)是一个随 ϕ 变化的椭圆方程, 当 $\phi = \pi/2$ 和 $\phi = 3\pi/2$ 时, 存在两个极限椭圆, 本文着重对这两种状态进行分析。

当 $\phi = \pi/2$ 时, 方程(14)可以表示为

$$\mu_e = \mu + (g_p + g_d) \sin \tau, \sigma_e = \sigma - \frac{1}{2}(g_p + g_d) \cos \tau \quad (16)$$

随着迟滞时间 τ 的变化, 分别得到其最大值和最小值:

$$\mu_e = \mu \pm |g_p + g_d|, \sigma_e = \sigma \quad \text{或} \quad \mu_e = \mu, \sigma_e = \sigma \pm |g_p + g_d| \quad (17)$$

当 $\phi = 3\pi/2$ 时, 方程(14)可以表示为

$$\mu_e = \mu + (g_p - g_d) \sin \tau, \sigma_e = \sigma - \frac{1}{2}(g_p - g_d) \cos \tau \quad (18)$$

随着迟滞时间 τ 的变化, 分别得到其最大值和最小值:

$$\mu_e = \mu \pm |g_p - g_d|, \sigma_e = \sigma \quad \text{或} \quad \mu_e = \mu, \sigma_e = \sigma \pm |g_p - g_d| \quad (19)$$

作为算例, 取 $\alpha = -0.5, \beta = 1.8, f = 3.0, \mu = 0.1, g_p = 0.9, g_d = 0.1$ 进行数值模拟, 以此分析迟滞参数对系统(1)的分叉控制。

由图2可以看出, 适当选取时滞参数, 不仅可以改变分叉响应曲线的拓扑形态(a), 还可以平移分叉响应曲线(b), 即使其分叉提前或滞后, 还能同时满足这两种要求。分析结果表明, 时滞系统能有效地对

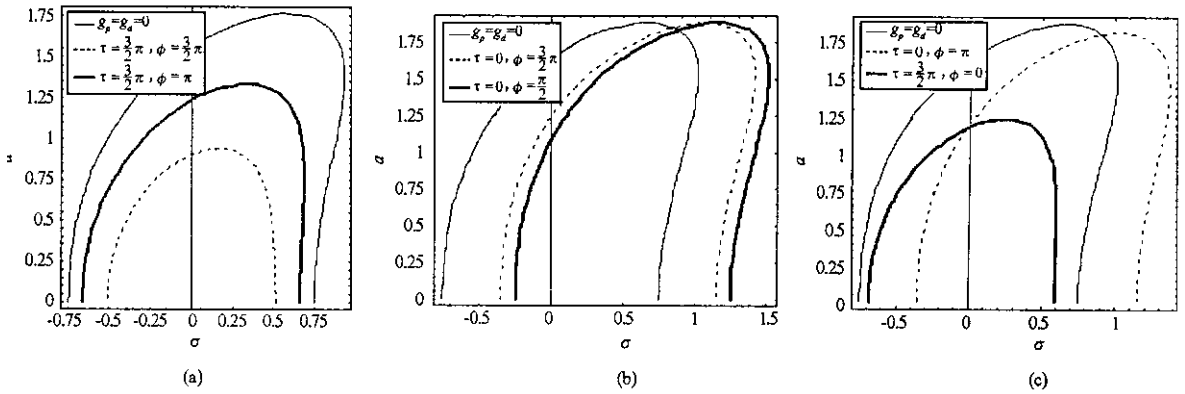


图 2 原系统及受控系统的分叉响应曲线

Fig.2 The bifurcation curves of original and controlled system

该类参数激励系统的 1/2 亚谐共振 - 主参数共振分叉响应进行控制。当然,系统(1)还含有其它类型的分叉,如主共振,1/3 亚谐共振的分叉,对其时滞控制有待进一步研究。

4 结 论

对时滞控制作用下的参数激励 van der Pol 方程进行了研究,着重研究了时滞系统对该类参数激励系统的 1/2 亚谐共振 - 主参数共振分叉响应控制。采用摄动法从理论上推导出含有时滞参数的分叉响应方程,采用数值模拟的方法研究了时滞参数对系统分叉响应的影响。结果表明,适当选取时滞参数,不仅可以改变分叉响应曲线的拓扑形态,还可以平移分叉响应曲线,即使其分叉提前或滞后,还能同时满足这两种要求。本文试探性地研究了时滞系统对该类参数激励系统的 1/2 亚谐共振 - 主参数共振分叉响应控制,得到满意的结果,说明时滞系统在分叉控制领域研究方面会有着更为广泛的前景。

参 考 文 献:

[1] Just W, et al. Mechanism of Time-delayed Feedback control[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(2): 203 - 206.
 [2] Chen G, Moiola J L, Wang H O, Bifurcation Control: Theories, Methods, and Application[J]. Int. J. of Bifurcation and Chaos, 2000, 10: 511 - 548.
 [3] Hu H Y, Wang Z H. Stability Analysis of a Damped s. d. o. f. System with Two Time-delays in State Feedback[J]. J. of Sound and Vibration, 1998, 214: 213 - 225.
 [4] Ji J C, Leung A Y T. Resonances of a Non-linear s. d. o. f. System with Two Time-delays in Linear Feedback Control[J]. J. of Sound and Vibration. 2002, 25(5): 985 - 1000
 [5] 彭解华,于德介,唐驾时,等. Van der Pol-Duffing 系统的非共振 Hopf 分叉[J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(2): 107 - 110.
 [6] Nayfeh A H. Perturbation Method[M]. John Wiley & Sons, New York, 1973.

