

## 利用迭代线性约束最小二乘方法实现不规则阵列的方向图综合\*

陆必应 梁甸农

(国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

**摘要** :研究了用自适应波束形成技术实现不规则阵列的方向图综合问题,改进了应用于方向图综合的迭代线性约束最小二乘方法,改进后的算法提高了数值稳定性和对随机稀疏阵的适应性。对特定的阵列如果指定的理想方向图无法达到,该算法可以获得最好的逼近。仿真结果验证了算法的性能。

**关键词** :方向图综合 ;不规则稀疏阵 ;线性约束最小二乘法

**中图分类号** :TN713      **文献标识码** :A

## The Synthesis of Nonuniform Array Pattern by Using Iterative Linear Constraints Least Square Method

LU Bi-ying, LIANG Dian-nong

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** :The pattern synthesis algorithm for arbitrary arrays using adaptive beamforming method is discussed. An improved iterative linear constraints least square algorithm is presented. The new algorithm exhibits numerical robust and can be used with random sparse arrays. The algorithm finds the best attainable pattern with the given array if the pattern specifications cannot be met. Numerical examples are presented to illustrate the performance of the algorithm.

**Key words** :pattern synthesis ;nonuniform sparse array ;linear constraints least square

近年来,具有特殊要求的不规则阵列的方向图综合问题受到广泛关注<sup>[1~6]</sup>。对均匀分布的线阵,经典的方向图综合方法是 Dolph-Chebyshev 方法,且可推广到平面阵和三维阵<sup>[1,2]</sup>。但该方法对非均匀阵不适用,也不能对方向图施加特殊的包络约束。非均匀不规则阵具有特殊要求的方向图综合具有很大的挑战性,解决该问题的方法主要分两类:基于自适应阵列理论的方法<sup>[1~6]</sup>和基于优化理论的方法。基于优化理论的方法存在的主要问题一是计算量大,二是由于阵列的不规则性和约束条件的多样性,使得优化问题很难满足凸条件,从而不能保证得到最优解。本文主要研究基于自适应阵列理论的不规则阵列有特殊要求的方向图综合方法。

利用自适应理论综合阵列方向图有两种不同的思路:一是人为设计干扰信号,在最大信杂噪比(SINR)准则下,计算阵列权值矢量,将获得的方向图与理想的方向图比较,如果某个方向的旁瓣比理想值高,则增加该方向的干扰,通过多次迭代运算,直到获得最佳权值矢量或结果不再改善为止<sup>[2,3]</sup>;二是利用线性约束最小二乘波束形成法,通过设计不同的线性约束最小二乘波束形成器,对权值矢量进行迭代逼近,从而得到理想的方向图或结果不再改善为止<sup>[1]</sup>。方法一由于在每次迭代过程中都更新了输入信号,需重新进行矩阵求逆计算,收敛速度较慢,而方法二只需更新线性约束条件,计算量相对较小。二者存在的问题是不能保证算法的收敛性,对一些不规则阵列、特别是稀疏阵,仿真结果表明迭代结果发散。文献[4,5]分别采用递归最小二乘计算取代了矩阵直接求逆,并采用最小化最大误差准则,可对阵列方向图施加更为直接的约束,但同样没有解决算法的稳健性问题,仿真结果表明收敛速度慢于文献[1]的批处理迭代方法。

\* 收稿日期:2005-06-24  
作者简介:陆必应(1976—),男,讲师,博士生。

## 1 阵列方向图

空间离散阵列空间特性最有效的描述是阵列方向图。假设空间阵列由  $M$  个阵元组成,阵元  $m$  的权值为  $w_m$ ,空间位置为  $x_m$ ,则阵列的方向图就是阵元的空间三维 Fourier 变换:

$$P(k) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m^* e^{jk \cdot x_m} \quad (1)$$

其中,  $k$  是波数矢量,且有  $|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。人们习惯将方向图表示成方位角  $\theta$  和俯仰角  $\phi$  的函数:

$$k = -\frac{2\pi}{\lambda} (\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi) \quad (2)$$

对任意一个空间三维阵,假设第  $m$  个阵元的位置  $x_m = (x_m, y_m, z_m)$ ,则对应的阵列方向图为:

$$P(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m^* e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \sin\phi (x_m \cos\theta + y_m \sin\theta + z_m \cos\phi)} \quad (3)$$

通常情况下仅对其幅度感兴趣,此时称  $p(\theta, \phi) = |P(\theta, \phi)|$  为阵列的方向图。

由阵列信号处理的基本理论知:空间随机分布的不规则阵列(紧凑或稀疏),阵列孔径大小(阵列尺寸)而不是阵列几何结构决定了阵列方向图的主瓣宽度,也决定了阵列的空间分辨率;假设阵元个数为  $N$ ,则旁瓣功率的大小平均为主瓣峰值的  $1/N$ ,且与阵元的位置分布独立;按离主瓣位置计算,旁瓣幅度大小成瑞利分布,且与阵元位置无关,最大旁瓣可比平均值高 10dB;对加权的阵列,阵元的权值决定了阵列方向图的具体形状。这些结论对阵列方向图的综合具有重要的指导意义。

## 2 迭代自适应波束形成阵列方向图综合方法

### 2.1 基本原理

为简单起见,假设阵列为沿  $x$  轴分布的由  $M$  个阵元构成的一维阵,在满足远场条件假设下,单位幅度单频信号以  $\phi$  角 ( $\theta = 0$ ) 入射到阵列,则阵列响应为:

$$P = W^H \cdot U \quad (4)$$

其中,  $U = [\exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}x_0\sin\phi), \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}x_1\sin\phi), \dots, \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}x_{M-1}\sin\phi)]$ , 为单位幅度输入信号,通常称为空间导引矢量,  $W = [w_0, w_1, \dots, w_{M-1}]$  为权值矢量。

在线性约束最小方差(LCMV)波束形成器中,通过对权矢量施加线性约束来控制波束响应。保证特定方向的信号以增益  $f$  通过,同时使输出信号中干扰分量最小化,从而得线性约束最小方差波束形成器的典型形式:

$$\begin{aligned} \min W^H R W \\ \text{s.t. } W^H U = f \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $R = E[XX^H]$  为输入信号(包括干扰、噪声)的自相关矩阵,其解为:

$$W = R^{-1} U (U^H R^{-1} U)^{-1} f \quad (6)$$

在自适应波束形成中,如何获得输入信号的自相关矩阵是关键。本文采用虚拟自适应方法,即输入信号是人为设计的,其相关矩阵可近似为  $R = XX^H$ ,此时该方法称为线性约束最小二乘法(LCLS)。

假设在方向图指向的方向  $\phi_0$  设定  $f = 1$ ,在其它方向不加任何约束,则该方法与最大信噪比准则法得到相同的权值矢量(有不同的比例系数)二者是等价的。对于有特殊要求的方向图,如在某个方向形成强零点,一方面可以在信号设计时,在此方向增加强干扰;另一方面可在此方向增加线性约束,直接限定该方向的增益值。图 1 的实线即是直接采用 LCLS 法设计的由 10 个间距为  $\lambda/2$  的阵元构成的均匀线阵的方向图。

然而,在实际应用中可能希望获得更低的旁瓣,也可能希望在多个方向同时陷零,此时上述方法直接得到的结果不能令人满意。特别地,对不规则阵和稀疏阵直接采用单次 LCLS 法综合出的方向图很

难满足实际应用的需求,因此本文采用迭代法来提高方向图的综合效果。

## 2.2 改进的迭代算法

迭代的 LCLS 方法通过更新线性约束最小二乘波束形成器的线性约束条件,对加权矢量进行迭代逼近,从而获得理想的方向图。其基本步骤为:

(1)初始化。假设在任一角度方向的输入信号为单位幅度单频信号,从而得到其自相关矩阵为  $R = UU^H$ ,其中  $U$  为角度离散化的空间导引矢量。如果矩阵奇异,可通过增加噪声分量来消除,即  $R \leftarrow R + \sigma_n^2 I$ 。设定方向图指向约束  $W^H U(\phi_d) = 1, W^H U'(\phi_d) = 0$ 。利用(6)式求得初始权值矢量。

(2)利用获得的权矢量计算方向图,确定旁瓣峰值点位置,若所有峰值小于预先设定的门限值  $\epsilon$  时,迭代停止,否则选取最大的  $M-2$  个峰值点(若峰值点小于  $M-2$ ,则全选),设定约束值  $f_i = (\epsilon - |c_i|) \frac{c_i}{|c_i|}$  ( $i = 1, 2, \dots, m_{\max}$ ),其中  $c_i$  为峰值点的旁瓣值。

(3)在新的约束条件  $\delta W^H U(\phi_d) = 0, \delta W^H U'(\phi_d) = 0, \delta W^H U(\phi_i) = f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m_{\max}$ )下,利用(6)式解线性约束最小二乘问题,得  $\delta W$ ,其中前两个约束是起主瓣保形作用的。

(4)权矢量更新  $W \leftarrow W + \delta W$ ,转到步骤(2)。

该迭代方案对均匀线阵方向图的综合是有效的<sup>[1]</sup>,但对不规则阵、特别是不规则的稀疏阵,往往不能得到满意的结果,甚至迭代过程是发散的,必须加以改进。

在步骤(2)中,新的线性约束值满足条件  $|f_i + c_i| = \epsilon$ ,即假定经过一次迭代后,本峰值点一定能下降到预先设定的门限值  $\epsilon$ 。显然,这种限定具有强制性和武断性,为实现这种强制约束,在某些情况下必然导致其它点的严重畸变。而在下一次迭代过程中,对畸变点附加了强制约束,又可能引起更多的点畸变,从而导致整个迭代过程振荡、不收敛。因此门限  $\epsilon$  的设定方案对迭代算法的收敛性有直观重要的影响。根据阵列信号处理理论,对未加权的随机稀疏阵,假设阵元个数为  $M$ ,则旁瓣功率的大小平均值为主瓣峰值的  $1/M$ ,且与阵元的位置分布无关。因此,有理由相信,旁瓣幅度  $\text{delta}1 = 1/\sqrt{M}$  是完全能够得到的。假设初始化方向图得到的最高旁瓣为  $\text{delta}2$ ,则初始门限参考值为  $\epsilon_0 = \min\{\text{delta}1, \text{delta}2\}$ ,在迭代中逐步加强,直到获得理想方向图或发散为止。对于有特殊要求的非等旁瓣方向图,初始门限为方位角的函数  $\epsilon_0(\theta) = \min\{\text{delta}1, \text{delta}2(\theta)\}$ ,同样在迭代中逐步加强。下面以非等旁瓣方向图为例介绍门限加强方案。假设期望得到的理想方向图旁瓣电平为  $\epsilon(\theta)$ ,为实现  $\theta_1$  方向陷零的需要,要求

$\epsilon(\theta) = \begin{cases} \epsilon, & \theta \neq \theta_1 \\ \epsilon_1, & \theta = \theta_1 \end{cases}$ ,其中  $\epsilon_1 < \epsilon$  (所有电平均以分贝为单位)。若第  $k$  次迭代收敛,得到的方向图旁瓣为

$\epsilon_k(\theta)$ ,则第  $k+1$  次迭代的门限为  $\epsilon_{k+1}(\theta) = \epsilon_k(\theta) + d_{k+1}(\theta)$ ,其中  $d_{k+1}(\theta) = \delta \cdot [\epsilon(\theta) - \epsilon_k(\theta)]$  为门限改进量,  $0 < \delta \leq 1$  为步长参数,实际中选 0.5 左右既可以保证较快的收敛速度,又可以获得较高的精度;若第  $k$  次迭代发散,则既可选第  $k-1$  次迭代结果为最终结果同时结束迭代,又可以选门限  $\epsilon_{k+1}(\theta) = \epsilon_{k-1}(\theta) + \delta \cdot d_k(\theta)$  进行进一步迭代,以获得更精确的最优解。

在步骤 2 中,选择  $M-2$  个最大的旁瓣作为线性约束点,没有考虑其相关性,导致在步骤 3 中利用(6)式求权矢量更新值时,矩阵  $U^H R^{-1} U$  奇异或近似奇异,产生数值上的不稳定。因此选择线性约束点时,不能追求约束点的个数,而必须考虑约束点之间的相关性。因此需求出所有峰值点的导向矢量间的线性相关性,设置一个相关度的门限,在门限内按相关程度强弱选取适当的约束点。具体方法为:求由导向矢量组成的矩阵的特征值,所有特征值与最大特征值作比较,设计一个门限(如  $10^{-3}$ ),小于此门限的特征值对应的向量与其它向量相关,舍弃相应的峰值点;如果满足设定门限的峰值点多于  $M-2$ ,则选取  $M-2$  个最大特征值对应的点作为约束点。按此原则选择约束点,一方面保证数值的稳定性,另一方面能减小矩阵的规模,减小计算量。随着阵列随机性和稀疏性的增加,其旁瓣的随机性也增加,在迭代过程中不能期望仅选择旁瓣极值点作为约束点,而必须在所有角度离散点中选取相对于理想方向图误差较大的点。

在稀疏不规则阵的情况下,步骤(3)中的主瓣保形约束条件不是充分条件,在迭代过程中主瓣可能

发生较大的畸变。为控制主瓣的形状,应根据需要设置理想的方向图,将主瓣、旁瓣统一起来用随方向角度变化的误差门限  $\epsilon_k(\theta)$  加以约束,以精确控制方向图。

### 3 仿真结果分析

对改进的迭代方法,大量的仿真结果验证了算法的稳健性和适用性,下面选几个代表性的例子作为说明。首先通过一个均匀的线阵说明本文的迭代算法在改善方向图性能方面的有效性。一个由 10 个间距为  $\lambda/2$  的阵元构成的均匀线阵,直接采用线性约束最小二乘准则得到的方向图如图 1 中的实线所示,其中图(a)是主瓣指向  $0^\circ$  的标准方向图,图(b)主瓣也指向  $0^\circ$ ,但在  $32^\circ \sim 41^\circ$  增加了陷零的约束条件。虚线分别表示采用本文迭代方法得到的方向图,迭代停止条件是旁瓣达到 20dB 的抑制,陷零的条件是相对于主瓣达到 55dB 的抑制。

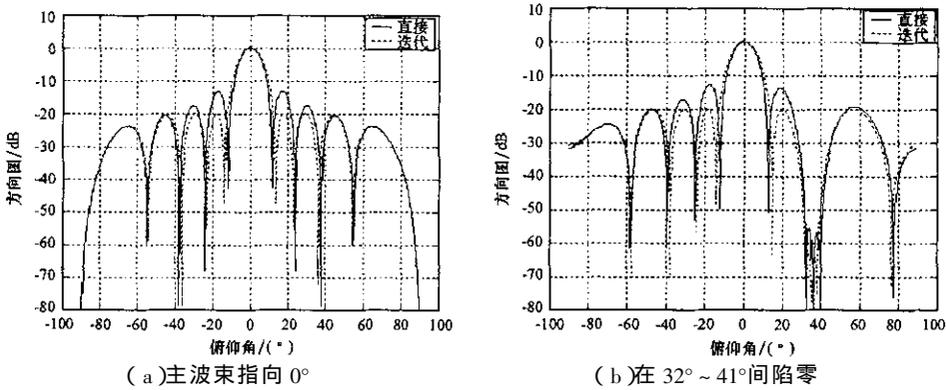


图 1 均匀线阵的方向图

Fig.1 Patterns of linear filled array

由图 1 可见,迭代方法能有效降低旁瓣幅度,但旁瓣电平的降低是以主瓣展宽为代价的,且旁瓣抑制存在一个临界点,超过这个临界值,迭代过程就会发散,利用本文提出的逐步门限加强法能自然得到此临界值。对图 1(a)所示的标准方向图,能获得的最大旁瓣抑制为 38.5dB,超过此门限,迭代过程发散。不同旁瓣抑制对应的主瓣 3dB 宽度如表 1 所示。

表 1 旁瓣抑制与主瓣宽度

Tab.1 Sidelobe depression and mainlobe width

最高旁瓣(dB)	-13.1	-20	-30	-38.5
3dB 主瓣宽度( $^\circ$ )	10.4	11.4	13.2	14.6

第二个仿真例子直接采用文献[1]中的阵列,以便于比较。该阵列是由 21 个阵元构成的线阵,阵元间距由随机函数产生,在区间  $[0, 1]$  内均匀分布,单位为波长  $\lambda$ ,阵元的具体位置为  $[0, 0.4618, 0.8425, 1.2126, 1.6328, 1.9412, 2.5037, 3.2092, 3.4567, 3.9539, 4.2221, 4.5851, 5.2431, 5.6073, 6.2850, 6.5660, 7.1697, 7.5401, 8.1355, 8.4386, 8.8206]$ 。该阵列实际上是不规则分布的紧凑阵。利用文献[1]的迭代方案和本文的迭代方案得到的最大旁瓣抑制方向图如图 2 所示,其中虚线代表文献[1]方法获得的结果,门限值通过试探法获得。实线代表本文方法获得的结果。可见,改进后的方法获得了更高的旁瓣抑制。

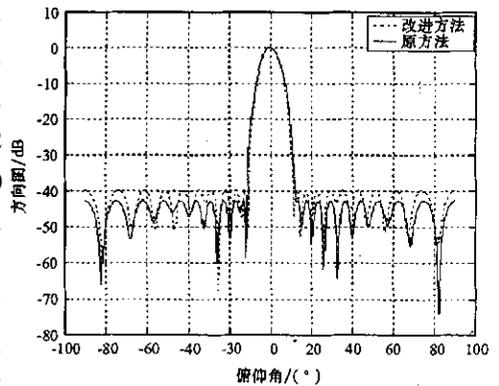


图 2 不规则紧凑阵的方向图

Fig.2 Patterns of nonuniform filled array

为说明阵列稀疏性的影响,第三个仿真阵列在不改变阵

元相对几何形状的基础上,直接对第二个不规则阵稀疏化,将所有阵元间距扩大1.2倍。利用本文的迭代方法进行20次迭代获得最佳旁瓣抑制-23.4dB,如图3(a)所示。以此最佳值作为门限,利用文献[1]的方法迭代20次时的最高旁瓣电平为-17dB,50次迭代后的结果如图3(b)所示,可见旁瓣幅度为-19dB,值得注意的是,此时主瓣包络发生明显的变形(不对称),且随着迭代次数的增加,主瓣将发生更为严重的畸变。大量的仿真结果表明,用文献[1]方法综合稀疏不规则阵列方向图时主瓣畸变是普遍存在的问题,而不是特例,且在迭代过程中经常发生振荡现象。

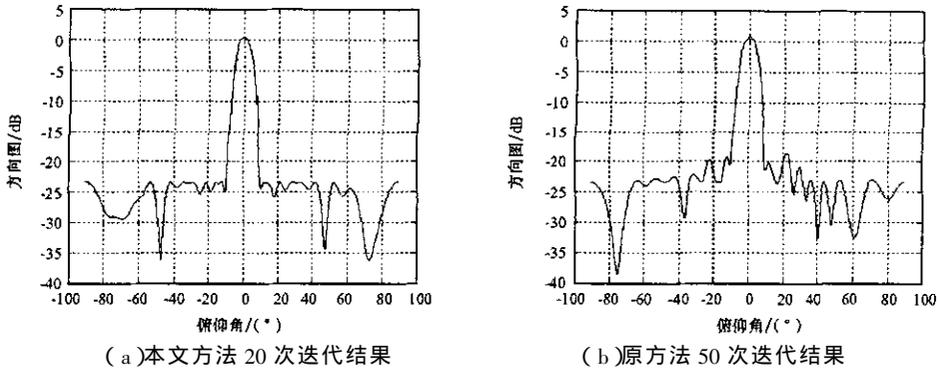


图3 不规则稀疏阵方向图

Fig.3 Patterns of nonuniform sparse array

从前面的仿真结果可知,迭代线性约束最小二乘波束形成器能成功地应用于有特殊要求的阵列方向图的综合,改进后的迭代方法在保证算法稳健性的条件下直接获得理想方向图的最大限度近似,且优于用原方法迭代获得的方向图,改进的算法对随机稀疏阵列具有更强的适应性,具有更好的主瓣保形功能,如果原算法一次门限试探即能获得最优结果,则改进的算法收敛速度一些慢,但考虑到原算法通常要进行多次门限试探,且可能存在的振荡现象,则改进的算法具有较大的优势。

#### 4 小结

本文研究了用迭代的自适应波束形成方法综合任意阵列的方向图问题。首先介绍了随机稀疏阵列方向图的基本理论,随后推导了自适应波束形成方向图综合的基本模型,对应用于方向图综合的迭代线性约束最小二乘方法进行了改进,理论分析和仿真结果表明改进的方法提高了算法的稳健性和对随机稀疏阵的适应性,相对于原方法能综合出更好的方向图。

#### 参考文献:

- [1] Tseng C, Griffiths L J. A Simple Algorithm to Achieve Desired Patterns for Arbitrary Arrays[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, 40(11): 2737 - 2746.
- [2] Olen C A, Compton R T. A Numerical Pattern Synthesis Algorithm for Arrays[J]. IEEE Trans. Antennas Propag., 1990, 38(10).
- [3] Swart W A, Oliver J C. Numerical Synthesis of Arbitrary Discrete Arrays[J]. IEEE Trans. Antennas Propag., 1993, 41(8).
- [4] Dotlic I D, Zejak A J. Arbitrary Antenna Array Synthesis Using Minimax Algorithm[J]. Electronics Letters, 2001, 37(2).
- [5] Wang F, Yang R, Frank C. A New Algorithm for Array Pattern Synthesis Using the Recursive Least Squares Method[J]. IEEE Processing Letters, 2003, 10(8).
- [6] 陈强,王展,皇甫堪. 盲自适应的多用户 CDMA 阵列接收机[J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(4).

