

确定重构相空间维数的方法*

张 雨^{1,2},任成龙¹

(1.长沙理工大学 载运工具研究所,湖南 长沙 410076;2.南京工程学院 机械工程系,江苏 南京 210013)

摘要:计算混沌统计特征量前必须先获得重构相空间的维数,因此给出了最大特征值不变法、几何不变量法、虚假邻点法、预测误差最小法、最小 Shannon 熵法、经验赋值法六种确定方法,得出了应用最大特征值不变法和最小 Shannon 熵法的工程案例计算结果。

关键词:混沌动力学;重构相空间;最小嵌入维;符号序列分析;Shannon 熵

中图分类号:O415.1;O19 **文献标识码**:A

The Methods to Confirm the Dimension of Re-constructed Phase Space

ZHANG Yu^{1,2},REN Cheng-long¹

(1. Institute of Vehicle Operation Engineering, Changsha Univ. of Science and Technology, Changsha 410076, China;

2. Department of Mechanism, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 210013, China)

Abstract: It is necessary to get the dimension of re-constructed phase space before calculating the chaotic statistical characteristics. Six methods are offered which are the measurement of the on unaltered maximal characteristic value, the measurement of changeless geometry mete, the measurement of false nearest neighbors, the measurement of minimum prediction error, the measurement of minimal Shannon entropy, and the measurement of the experience evaluation. An engineering case is given to explain the application of the measurements of the unaltered maximal characteristic value and minimal Shannon entropy.

Key words: chaos dynamics; re-constructed phase space; minimum embedding dimension; symbolic series analysis; Shannon entropy

混沌是由系统内部确定性的非线性动力过程产生的非周期宏观时空行为,它把表观的无序性与内在的规律性巧妙地融为一体,反映了非线性动力学系统具有的内在随机性(intrinsic stochasticity),是一种貌似无规则的在确定性系统中出现的类似随机的过程。如果一个系统同时具有对初值的敏感性并出现非周期性运动,可认为系统是混沌的。

对非线性动力学系统的特性常用混沌统计特征量进行描述,如 Poincare 截面、Kolmogorov 熵、关联维 D_2 、最大李指数 λ_{\max} 等。

(1) Poincare 截面。Poincare 截面可定性地说系统运动是否具有混沌特性,它与系统运动状态间的关系是: Poincare 截面为简单的闭环曲线对应于系统作周期运动; Poincare 截面为自身相交的闭环曲线对应于系统作准周期运动; Poincare 截面具有无限精细的分形结构对应于系统作混沌运动。

(2) Kolmogorov 熵。Kolmogorov 熵(简称熵)是表征系统无序程度的重要测度,而无序程度的增加对应于状态可知性的减少。 K 熵的不同值对应着不同的系统状态: $K = 0$ 对应于系统作周期运动; $K > 0$ 对应于系统作混沌运动; $K \rightarrow \infty$ 对应于系统作随机运动。通过计算 K 熵即可对系统运动状态作出定性的分类。

(3) 奇异吸引子的关联维 D_2 。不同的 D_2 值对应着不同的系统状态: $D_2 = 1$ 对应于系统作周期运

* 收稿日期: 2005-06-18

基金项目: 湖南省自然科学基金(03JJY3006); 江苏省高校自然科学基金计划(04KJB580037)

作者简介: 张雨(1958—),男,教授,博士后。

动; $D_2 = 2$ 对应于系统作准周期运动; $D_2 > 2$ 或 D_2 不为整数对应于系统作混沌运动。通过计算关联维也可对系统运动状态作出明确的分类。

(4) 李指数 λ_1 和最大李指数 λ_{\max} 。Lyapunov 指数 λ_i (简称李指数) 刻画奇异吸引子性质的测度和统计量。李指数是针对系统的运动轨道而言的, 在 n 维离散系统中存在 n 个李指数, 正的李指数表明在该维方向, 系统运动轨道迅速分离, 长时间行为对初始条件敏感, 系统的运动是混沌的。若最大李指数 $\lambda_{\max} > 0$, 则系统一定存在混沌。

在计算这些混沌统计特征量之前必须先确定重构相空间的维数 M , 为此给出最大特征值不变法等六种确定重构相空间维数的方法。

1 确定重构相空间的维数 M

1.1 最大特征值不变法^[1]

设由离散时间序列 $\{x_n\}$ 重构的维数为 M 的相空间元素为:

$$X_j(M, N, \tau) = (x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+(M-1)\tau}), \{X_j, R^M, j = 1, 2, \dots, p\} \quad (1)$$

式中, 时延 τ 是固定的时间间隔个数, $p = N_0 - (M - 1)\tau$ 是时间序列嵌入相空间的向量个数。重构相空间 R^M 中的向量集 $\{X_j\}$ 包括了原时间序列中的全部元素, 故根据嵌入理论知向量集 $\{X_j\}$ 构成的状态轨道保留了原空间状态轨道的主要特征, 从而可以通过向量集 $\{X_j\}$ 了解原系统的主要动力学特性。由重构相空间 R^M 中的向量集 $\{X_j\}$ 构造如下轨道矩阵 X :

$$X = \frac{1}{\sqrt{p}} [X_1^T, X_2^T, X_3^T, \dots, X_p^T]^T \quad (2)$$

对 X 构造协方差矩阵 $S = X^T X$, 通过满秩线性变换使其成为标准型, 它的特征向量族成为重构的相空间 R^M 的一组完全正交基。当相空间维数 M 由小到大变化而协方差矩阵 S 的最大特征值不再随 M 的变化而变化时, 则确定了最小嵌入相空间维数, 即重构的相空间维数 M 。

1.2 几何不变量法

关于最小嵌入相空间维数, Takens^[2]、Sauer^[3]等先后从理论上证明了当 $M \geq 2d + 1$ 时可获得一个吸引子的嵌入, 其中 d 是吸引子的分形维数, 但这只是一个充分条件, 对实测时间序列选择 M 没有帮助。在实际应用中通常的方法是计算吸引子的某些几何不变量(如关联维 D_2 、Lyapunov 指数等), 逐渐增加 M , 直到这些不变量停止变化为止。从理论上讲, 由于这些不变量具有吸引子的几何性质, 当 M 大于最小嵌入维数时, 几何结构被完全打开, 此时这些不变量与嵌入维数无关, 于是选择吸引子的几何不变量停止变化时的 M 为重构的相空间维数。

1.3 虚假邻点法

虚假邻点法是一种从几何观点出发较易实现的方法, 其基本思想是^[4]: 当维数从 M 变成 $M + 1$ 时, 考察轨线 X_i 的邻点中哪些是真实的邻点, 哪些是虚假的邻点。当没有虚假的邻点时, 可以认为几何结构被完全打开。设 $X_{\gamma(l)}$ 是 X_i 的最近邻点, 它们之间的距离为 $\|X_{\gamma(l)} - X_i\|^{(M)}$, 当维数增加到 $M + 1$ 时, 它们之间的距离为 $\|X_{\gamma(l)} - X_i\|^{(M+1)}$ 。若 $\|X_{\gamma(l)} - X_i\|^{(M+1)}$ 比 $\|X_{\gamma(l)} - X_i\|^{(M)}$ 大很多, 可以认为是由于高维吸引子中两个不相邻的点在投影到低维轨线上时变成相邻两点所造成的, 因此这样的邻点是虚假的。若:

$$1 - \|X_{\gamma(l)} - X_i\|^{(M+1)} - \|X_{\gamma(l)} - X_i\|^{(M)} / \|X_{\gamma(l)} - X_i\|^{(M)} > R_T \quad (3)$$

则 $X_{\gamma(l)}$ 是 X_i 的虚假最近邻点, 阈值 R_T 可在 $10 \sim 50$ 选取。对无限长精确的数据, 用上述标准可获得较好的结果, 对有限长具有噪声的数据, 则补充以下标准, 若:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 / N} / \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 / N} > 2 \quad (4)$$

其中 $\bar{x} = (\sum_{i=1}^N x_i) / N$, 此时 $X_{\gamma(l)}$ 是 X_i 的虚假最近邻点。

对于实测时间序列,令试算的 M 从 2 开始,取 $R_T = 30$,计算虚假最近邻点的比例。逐步增加 M ,当虚假最近邻点不再随着 M 的增加而减少时,可以认为完全打开,此时的 M 即为重构的相空间维数。

1.4 预测误差最小法

预测误差最小法是从预测误差观点出发而提出的一种确定最小嵌入相空间维数的方法。对于实测的时间序列,根据 Takens 嵌入定理,当 τ 是最佳延迟时间间隔数, M 是最小嵌入相空间维数时,存在映射 $F: R^M \rightarrow R^M$ 或 $F_1: R^M \rightarrow R$,使得 $X_{i+1} = F(X_i)$ 或 $x_{i+1+(M-1)\tau} = F_1(X_M)$ 。利用映射 F 或 F_1 的连续性,当 X_i 和 X_j 靠近时, $x_{i+1+(M-1)\tau}$ 和 $x_{j+1+(M-1)\tau}$ 也应靠近,记 $X_{j(l)}$ 是 X_i 的最近邻点,即:

$$\|X_{j(l)} - X_i\| = \min_{j=1,2,\dots,P; j \neq i} \|X_j - X_i\| \quad (5)$$

计算平均一步预测误差,得:

$$E(M, \tau) = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^{p-1} \left| x_{i+1+(M-1)\tau} - x_{j(l)+1+(M-1)\tau} \right| \quad (6)$$

当 M 小于嵌入维数时,预测较差,所以 $E(M, \tau)$ 较大;当 M 达到最小嵌入维数时,映射 F 或 F_1 存在, $E(M, \tau)$ 减小;当 M 继续增加时,由于存在正的李指数及噪声, $E(M, \tau)$ 会随之增加,因此,当 $E(M, \tau)$ 最小时的 M 即为最小嵌入相空间维数。

1.5 最小 Shannon 熵法

1.5.1 时间序列符号化简介^[5-7]

引入划分 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_q\}$,并把系统状态空间划分为 $m = (q+1)^M$ 个单元,其中 M 是状态空间的维数, q 是划分个数, $q=1$ 为最简单的二进制划分,状态空间通过重构的相空间予以表达。每个单元用一个符号 $S_r \in \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ 进行标记。在相空间中为连续曲线的系统轨迹将被转换为符号序列,这些符号标记了被轨迹所访问的单元。这一符号模型以最简单的方式描述了系统的动力学特征,提供了一种研究复杂动态系统运行状态的手段。

可以通过一个阈值函数,将时间序列 $\{x_n\}$ 的元素 $x_n = x(t_n)$ 转换为符号序列 $\{s_n\}$ 的元素 $s_n = s(n)$:

$$\{x_n\} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \alpha \{s_n\} = (s_1, s_2, \dots, s_N), \quad s_n = (0, 1) \quad (7)$$

式(7)中 N 为原时间序列的数据长度或符号序列的数据个数。在确定了符号序列长度 L 和时延 τ 后,可把符号序列 $\{s_n\}$ 分组为短序列:

$$\bar{s}(k) = [s(k), s(k+\tau), \dots, s(k+(d-1)\tau)] \quad (8)$$

将时间序列转换为符号序列并经十进制编码后,可获得符号序列直方图,其中确定性信号对应的序列码呈现大率值,而随机噪声对应的序列码则呈现等率值,这一特性可用以检测未知原始时间序列中是否包含有确定性结构,从而评价复杂系统的状态。由符号序列直方图可得到统计量——Shannon 熵。在二进制划分下,可定义改进的 Shannon 熵:

$$H_s(L) = - \frac{1}{L \ln(q+1)} \sum P_{s_1 s_2 \dots s_L} \ln(P_{s_1 s_2 \dots s_L}) \quad (9)$$

式(9)中 $P_{s_1 s_2 \dots s_L}$ 是直方图中各个序列码对应的概率。Shannon 熵可用来描述数据紊乱的程度。对于混沌或随机的数据,其 Shannon 熵将趋向于 1;对于确定性的数据,其 Shannon 熵将趋向于 0;Shannon 熵处于 0~1 的中间状态时,将存在更为复杂但确定的结构。通过对 Shannon 熵的比较,可以判断数据间确定性程度的差异,故 Shannon 熵为信号处理方法与信息论搭了桥梁。

1.5.2 最小 Shannon 熵法

符号序列长度 L 等于重构相空间的维数 M ^[8,9],Shannon 熵 $H_s(L)$ 将随符号序列长度 L 的变化而变化。给定符号集大小 N_s ,令 L 从 1 开始增加,当 $H_s(L)$ 有最小值时,进行符号化变换可以较好地地区分动力学数据与随机噪声,此为最佳的符号序列长度 L ,也就是合适的重构相空间维数 M 。

1.6 经验赋值法

当上述方法都不可行时,还可通过经验予以赋值^[10,11]。经验表明,当重构相空间维数 M 取 3~10 之间某一值时,对于一般工程问题是一种基本接近合理的选择,通常对于复杂系统取高限。

2 检验准则

关联维 D_2 和重构相空间的维数 M 两者之间有关系^[12]:

$$M \geq 2D_2 + 1 \quad (10)$$

根据式(10),当计算出关联维 D_2 后,可以进一步考察重构的相空间维数 M 是否正确。

3 计算案例

对于搭载电子燃油喷射汽油机的某型号汽车在加速—滑行过程中的 CO 成分瞬态排放时间信号^[13],分别采用最大特征值不变法和最小 Shannon 熵法两种方法计算并得到重构相空间维数 M 。如图 1 所示分别是测试获得的 CO 成分瞬态排放时间信号、最小 Shannon 熵值—重构相空间维数曲线、协方差矩阵最大特征值之差—重构相空间维数 M 曲线。由图 1 可见:

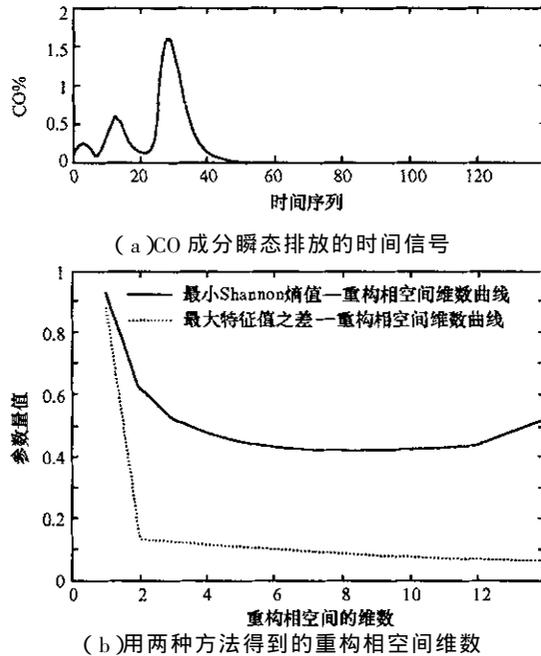


图 1 某车型的 CO 成分瞬态排放时间信号及其相空间维数

Fig.1 Time signal of CO transient emission of ve and its dimension of re-constructed phase space

(1)随着重构相空间维数 M 增大,对应的 Shannon 熵值有最小值;由最小 Shannon 熵法确定的重构相空间维数 $M = 9$ 。

(2)随着重构相空间维数增大,对应的协方差矩阵最大特征值之差确实在减少,表明最大特征值趋于定数,但是趋势较为缓慢;由最大特征值不变法确定的重构相空间维数 $M = 10$ 。

(3)由最小 Shannon 熵值法和最大特征值不变法两种方法得到的重构相空间维数 M 均落在经验赋值法提出的 3~10 的范围内。

(4)经计算得图 1(a)所示 CO 成分瞬态排放时间信号的关联维 $D_2 = 0.0444$,则由最小 Shannon 熵值法和最大特征值不变法两种方法得到的重构相空间维数均满足检验准则的要求。

4 小结

(1)给出了确定重构相空间维数 M 的六种方法,即:最大特征值不变法、几何不变量法、虚假邻点法、预测误差最小法、最小 Shannon 熵法和经验赋值法。

(2)为已经确定的重构相空间维数 M 给出了检验准则。

(3)采用实测的汽车电子燃油喷射汽油机瞬态排放时间信号,分别采用最大特征值不变法和最小 Shannon 熵法两种方法确定重构相空间的维数 M ,结果表明了所给方法的有效性。

(4)实践中确定重构相空间维数 M 时建议以最小 Shannon 熵值法为主,其它方法为辅。

参考文献:

- [1] Rechester A, White R B. Symbolic Kinetic Equation for a Chaotic Attractor[J]. Physics Review Letters A, 1991, 156: 419 - 424.
- [2] Takens F. Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics[M]. Berlin: Springer, 1981: 366 - 381.
- [3] Sauer T, Yorke J A, Casdagli M. Embedology[J]. J. Stat. Phys., 1991, 65: 579 - 616.
- [4] Abarbanel H D I, Brown R, Sidorowich J J, et al. The Analysis of Observed Data in Physical Systems[J]. Rev. Mod. Phys., 1993, 65(4): 1331 - 1392.
- [5] Rechester A, White R B. Symbolic Kinetic Analysis of Two-dimensional Maps[J]. Physics Review Letters A, 1991, 158: 51 - 56.
- [6] Schwarz U, Benz A O, Kurths J, et al. Analysis of Solar Spike Events by Means of Symbolic Dynamics Methods[J]. Astronomy and Astrophysics, 1993, 277: 215 - 224.
- [7] Lehrman M, Rechester A B, White R B. Symbolic Analysis of Chaotic Signals and Turbulent Fluctuations[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(1): 54 - 57.
- [8] Tang X Z, Tracy E R, Boozer A D, et al. Symbol Sequence Statistics in Noisy Chaotic Signal Reconstruction[J]. Physical Review E, 1995, 51(5): 3871 - 3889.
- [9] Tang X Z, Tracy E R, Boozer A D et al. Reconstruction of Chaotic Signals Using symbolic Data[J]. Physics Review Letters A, 1994, 190: 393 - 398.
- [10] Tuffillaro N, Weckesser W. Symbolic Dynamics in Mathematic Physics and Engineering[A]. Hewlett-Packard Research Labs at the IMA Industrial Problems Semina[C], 1997.
- [11] Daw C S, Finney C E A, Kennel M B. Measuring Time Irreversibility Using Symbolization[A]. Proceeding of Fifth Experimental Chaos Conference Orlando[C], Florida USA 1999.
- [12] 张雨,温熙森. 系统混沌特征参数的计算机求解[J]. 中国有色金属工业学报, 1999(S1): 19 - 23.
- [13] 张雨,刘少伦. 汽油机瞬态排放检测的新实践[J]. 小型内燃机与摩托车, 2004, 33(6): 28 - 30.

