

## 基于仿射近似的摄像机标定\*

唐力铁,邱志强,陆启生

(国防科技大学 光电科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

**摘要** :针对直接基于透视投影模型的标定算法计算量大、结果不稳定的事实,提出一种基于仿射投影矩阵的标定算法。算法首先线性解算仿射投影矩阵,然后分解出部分参数。在假定主点坐标等于图像中心的前提下,解算出其余参数,再以重投影图像点残差和为目标函数,对所有参数进行优化,获得精确的摄像机模型参数,达到精确、快速、稳定的标定目的。大量的仿真和真实图像实验证明算法比传统算法更稳定。

**关键词** :仿射近似;摄像机标定;图像

中图分类号 :TP391 文献标识码 :A

## Camera Calibration Based on Affine Approximation

TANG Li-tie, QIU Zhi-qiang, LU Qi-sheng

(College of Optoelectronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** :Considering the fact that the camera calibration method based on perspective projection model yield intricate and unstable result, a new calibration algorithm based on affine approximation was presented. The affine projection matrix was led out and then some parameters were decomposed. Under the presumption of taking image center as principal point, other parameters were solved. At last, all the parameters' precision was improved on the basis of the cost function of re-projection error. Simulation and real image experiments show that the new method can produce more stable result than the usual one.

**Key words** :affine approximation; camera calibration; image

摄像机标定指通过某种方法获得精确的摄像机模型参数的过程。摄像机标定方法大致可分为基于控制块的标定和摄像机自标定。控制块的点、直线等都可以作为标定基元,本文重点讨论基于控制块的标定,而且以点为标定基元,也就是基于控制点的标定。基于控制点的标定是根据一组已知空间位置的点与其图像对应点的关系求解摄像机参数,从而获得精确的摄像机成像几何模型的过程。

现有摄像机标定都是基于透视投影模型,其共同特点是以透视投影关系建立控制点的空间位置和对应的图像点位置的约束方程,反求摄像机参数完成标定。

随着仿射投影模型在图像解析中的应用引起少数学者的关注,基于仿射投影模型标定摄像机也开始受到重视。到目前为止,出现了少数文献研究基于仿射投影模型的摄像机标定<sup>[1]</sup>。文献[2]介绍了基于仿射投影模型通过 4 个以上控制点的物方坐标和对应图像坐标直接求解仿射投影矩阵的算法。这些算法虽然给出了分解参数的算法,但并不考虑摄像机具体参数间的约束关系,更不考虑模型相对透视投影的模型误差和镜头畸变,所以标定结果不够精确。对于如何以仿射近似为突破口标定精确的摄像机模型,国内外均未有相关文献报道。

本文提出一种基于仿射近似的摄像机标定法,即首先以仿射投影模型近似描述摄像机投影模型,求解出摄像机参数的近似值,然后基于透视投影模型进一步求精。

### 1 摄像机投影成像模型

#### 1.1 透视投影模型

摄像机成像通常采用透视投影模型,其基本关系式为

\* 收稿日期:2005-09-07  
作者简介:唐力铁(1974—),男,博士生。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 $(X, Y, Z)$ 为目标点世界坐标 $(u, v)$ 为对应的图像坐标, $R$ 与 $T$ 为世界坐标系与摄像机坐标系的旋转矩阵与平移向量。

## 1.2 仿射投影模型

如果投影矩阵 $M$ 的第3行前3个元素为0,即

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_5 & m_6 & m_7 & m_8 \\ 0 & 0 & 0 & m_9 \end{bmatrix} \quad (2)$$

这种投影关系称为仿射投影,此时物像投影关系方程式可改写为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 $a_1 = m_1/m_9, a_2 = m_2/m_9, a_3 = m_3/m_9, a_4 = m_5/m_9, a_5 = m_6/m_9, a_6 = m_7/m_9, b_1 = m_4/m_9, b_2 = m_8/m_9$ 。这就是仿射投影的表达式,用矩阵形式可写为

$$x = AX + B \quad (4)$$

其中三维向量 $X$ 为目标点的世界坐标,二维向量 $x$ 为对应的图像点坐标, $A$ 则为 $2 \times 3$ 阶仿射投影矩阵, $B$ 是二维平移向量。有时也称 $A$ 与 $B$ 一起构成的 $2 \times 4$ 阶矩阵 $[A|B]$ 为仿射投影矩阵 $M$ 。

## 2 新算法

### 2.1 基本思路

先基于摄像机的近似模型——仿射投影模型,标定摄像机的大部分参数,并将摄像机主点指定为图像中心,然后再基于透视投影模型对标定参数进行优化解算,直至获得精确的摄像机参数。其中一个关键技术就是将主点缺省看成是图像中心,这样可以减少2个未知数,加之以求解仿射投影矩阵取代求解透视投影矩阵,又可以减少3个未知数,共减少了5个未知数,大大提高了算法的数值稳定性。

需要指明的是,本算法称为基于仿射投影矩阵的摄像机标定法,并非是基于仿射投影模型的标定。算法首先计算仿射投影矩阵,然后从仿射投影矩阵中求解出大部分摄像机参数,最后仍要基于透视投影模型求精参数。可见,仿射投影矩阵的求解,作为中间环节在算法中起到关键作用。

首先,不考虑像差的影响,而且将摄像机投影模型用仿射投影模型近似,根据式(4)从图像点和对应目标点的三维位置建立线性方程组,从而线性求解得到仿射投影矩阵,并从仿射投影矩阵分解出部分摄像机内外参数,将主点指定为图像中心,然后解算出其余参数,这些内外参数描述的摄像机模型是近似模型。在此基础上,基于透视投影模型,以图像点重投影残差和为目标函数,对内外参数进行非线性优化,可提高内外参数的精度,再将优化后的内外参数代入透视投影方程,线性解出像差系数,将得到的像差系数代入近似模型则可得得到更精确的模型,如此迭代直至结果稳定。实践证明,迭代3至4次即可。

### 2.2 具体步骤

图1是算法流程图。

#### (1) 线性求解仿射投影矩阵

如果标定块上有 $n$ 个标定控制点,并已知它们的空间坐标 $(X_i, Y_i, Z_i) (i = 1, \dots, n)$ 以及对应的图像坐标 $(u_i, v_i) (i = 1, \dots, n)$ ,由式(4)可得

$$AL = 0 \quad (5)$$

其中  $L = [m_1, \dots, m_8]^T$  为投影矩阵  $M$  各元素排列后得到的向量,

$$A = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -v_1 \\ \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -v_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

令  $\|L\| = 1$ , 则  $L$  的解为  $A^T A$  最小特征值对应的单位特征向量。

(2) 从仿射投影矩阵分解出内外参数

求得  $L$  后, 即可求出  $M$ 。令

$$M \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_5 & m_6 & m_7 & m_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{2 \times 3} & m_4 \\ m_8 \end{bmatrix} \quad (7)$$

对  $M$  进行  $QR$  分解, 可得

$$M_{2 \times 3} = K_{2 \times 2} R_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} f_u & s \\ 0 & f_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \quad (8)$$

这样就得到内参数和旋转矩阵  $R$  的前 2 行。因为倾斜畸变  $s$  非常小, 在后面的优化过程中将其强制为 0。因为  $R$  是正交矩阵, 则其第 3 行可由第 1、2 行叉乘而得, 即

$$R_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} i \\ j \\ (i^T \times j^T)^T \end{bmatrix} \quad (9)$$

(3) 指定主点, 并解其余参数

令主点与图像中心重合, 即  $u_0 = w_{img}/2, v_0 = h_{img}/2$ , 其中  $w_{img}$  和  $h_{img}$  分别为图像的宽和高。根据仿射投影模型有

$$\begin{cases} m_4 = \frac{f_u}{H} t_x + u_0 \\ m_8 = \frac{f_v}{H} t_y + v_0 \end{cases} \quad (10)$$

其中  $H$  为视距, 视距的概略值可用其它方式获得, 因此可解出

$$\begin{cases} t_x = (m_4 - u_0) \frac{H}{f_u} \\ t_y = (m_8 - v_0) \frac{H}{f_v} \end{cases} \quad (11)$$

$t_z$  则指定为航高  $H$ , 这样就得到了所有内参数和外参数的初始值。

(4) 非线性优化内外参数

在前面的步骤中, 引入了一些误差, 主要来源有仿射近似的模型误差、主点近似为图像中心的误差和将  $t_z$  近似为航高的误差。此外, 由于观测误差(标定控制点三维坐标以及对应的图像点的量测坐标)的存在也引入了误差, 因此有必要采取一些优化手段对结果求精。优化的目标函数采用实际图像坐标与用线性模型计算出的图像点坐标的残差和

$$\delta = \sum_{i=1}^n \left[ u - f_u \left( \frac{r_1 X_i + r_2 Y_i + r_3 Z_i + t_x}{r_7 X_i + r_8 Y_i + r_9 Z_i + t_z} - k_1 x_i (x_i^2 + y_i^2) - (k_2 + k_4) x_i^2 - k_5 x_i y_i - k_2 y_i^2 \right) - u_0 \right]^2$$

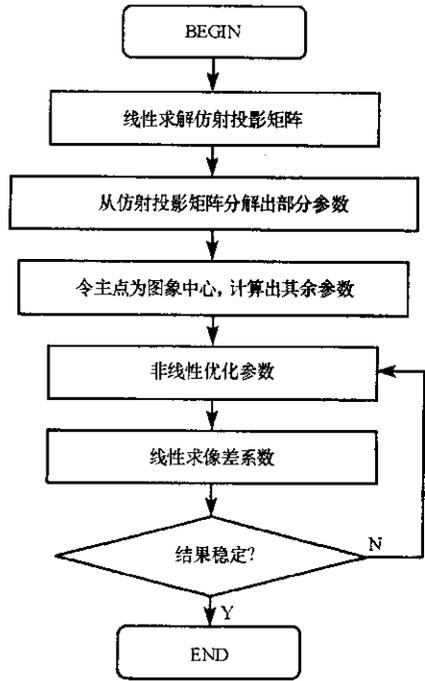


图 1 基于仿射近似的摄像机标定  
Fig.1 Camera calibratin based on affine approximation

$$+ \left[ v - f_v \left( \frac{r_4 X_i + r_5 Y_i + r_6 Z_i + t_y}{r_7 X_i + r_8 Y_i + r_9 Z_i + t_z} - k_1 y_i (x_i^2 + y_i^2) - k_3 x_i^2 - k_4 x_i y_i - (k_3 + k_5) y_i^2 \right) - v_0 \right]^2 \tag{12}$$

其中  $x_i = (u_i - u_0) / f_u$ ,  $y_i = (v_i - v_0) / f_v$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_9$  为  $R$  的各元素。优化开始时将像差系数指定为零, 将最优值约束在初始值的某邻域内, 当  $\delta$  取得极小值时内外参数为最优。

(5) 线性求解像差系数

根据式(12)可线性求解各像差系数:

$$\begin{bmatrix} u_i(u_1^2 + v_1^2) & u_1^2 + v_1^2 & 0 & u_1^2 & u_1 v_1 \\ v_i(u_1^2 + v_1^2) & 0 & u_1^2 + v_1^2 & u_1 v_1 & v_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n(u_n^2 + v_n^2) & u_n^2 + v_n^2 & 0 & u_n^2 & u_n v_n \\ v_n(u_n^2 + v_n^2) & 0 & u_n^2 + v_n^2 & u_n v_n & v_n^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_1 - u_1 \\ v'_1 - v_1 \\ \vdots \\ u'_n - u_n \\ v'_n - v_n \end{bmatrix} \tag{13}$$

其中  $(u_i, v_i)$  为实际图像坐标,  $(u'_i, v'_i)$  如下计算:

$$\begin{cases} u'_i = f_u \left( \frac{r_1 X_i + r_2 Y_i + r_3 Z_i + t_x}{r_7 X_i + r_8 Y_i + r_9 Z_i + t_z} \right) + u_0 \\ v'_i = f_v \left( \frac{r_4 X_i + r_5 Y_i + r_6 Z_i + t_y}{r_7 X_i + r_8 Y_i + r_9 Z_i + t_z} \right) + v_0 \end{cases} \tag{14}$$

2.3 步骤总结

- (1) 用式(5)和式(7)计算仿射投影矩阵  $M$ ;
- (2) 用式(8)计算有效焦距  $f_u, f_v$  和旋转矩阵  $R$  的前2行元素  $i, j$ ;
- (3) 用式(9)计算旋转矩阵  $R$  的第3行元素  $k$ ;
- (4) 将主点指定为图像中心, 用式(11)计算平移向量中的  $t_x, t_y$ , 并将  $t_z$  指定为航高  $H$ ;
- (5) 基于式(12)对初始值进行优化计算;
- (6) 用式(13)线性求解像差系数  $k_1, k_2, k_3, k_4$  和  $k_5$ ;
- (7) 对步骤(5)和(6)进行有限次迭代, 直至结果稳定。

2.4 算法的优点

相对其它标定算法, 基于仿射投影模型的摄像机标定法具有以下优点:

- (1) 首先求解仿射投影矩阵, 而非透视投影矩阵, 未知数更少, 所需特征点数更少, 结果更加稳定;
- (2) 对所求内外参数, 均基于精确的透视投影模型进行优化, 确保了结果的高精度;
- (3) 对非线性优化内外参数和线性求解像差系数两步的有限次迭代既保证了速度, 又保证了精度;
- (4) 像差模型不仅考虑了径向畸变, 而且考虑了切向畸变。

3 算法的实验验证

为了检验算法的性能, 分别设计了真实图像实验和仿真实验。

如图2所示, L和R分别表示待标定的 CCD 摄像头, 有效敏感元为  $512 \times 512$  像素, 摄像头型号是 Pulnix。1 为标定板, 由 2 块边长为 20mm 的正方形硬塑料板以  $90^\circ$  夹角拼接而成, 以板上绘制的网格线交点作为标定控制点。标定板平面度可以达到 0.1mm, 在钳工车间拼接, 夹角误差小于  $0.01^\circ$ 。标定控制点三维位置误差小于  $9\mu\text{m}$ 。2 为待检测的目标, 与标定网格板类似, 但其上的特征点较稀疏。

标定控制点经摄像机成像后(如图3所示), 用“十”字相关法对网格结点进行检测, 经过仿真实验表明检测精度可以达到 0.02 像素精度。

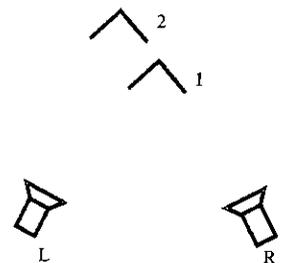


图2 仿真实验  
Fig.2 The simulated experiment

标定图像点与其三维点之间的对应是由手工完成的,可以确保无错误匹配点。

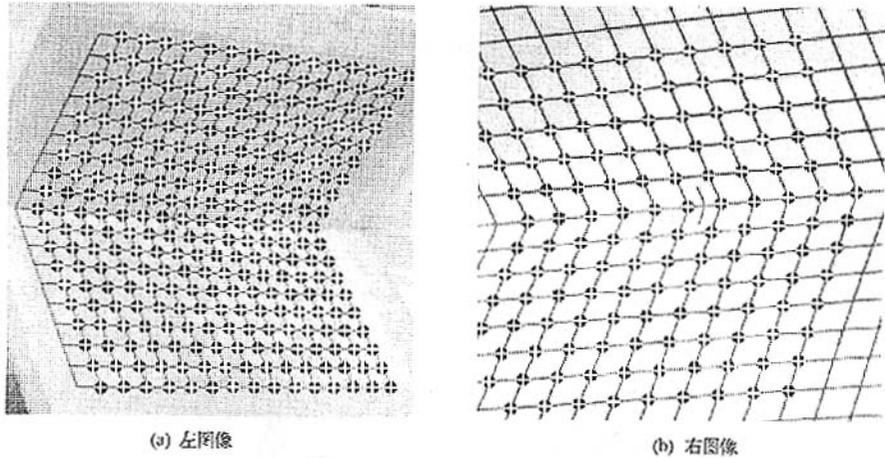


图3 实际用来标定摄像机的网格板图像

Fig.3 The grid pattern for calibration

表1列出了实验结果。标定点数是通过人为去掉若干点来实现的。图4是像差矢量图,在图像中央处像差比较小,在四周比较大,呈辐射状。这与实际情况相符。

表1 用摄像机标定结果进行三维重建的计算值

Tab.1 Experimental results

	理论值(mm)	使用40个标定控制点		使用100个标定控制点	
		测量值(mm)	相对误差(%)	测量值(mm)	相对误差(%)
AB	42.68	42.69	0.014	42.20	0.009
BC	43.44	43.59	0.356	43.57	0.300
BD	65.16	64.89	0.419	64.94	0.335
AC	60.56	60.22	0.566	60.82	0.430
DA	77.63	77.78	0.192	77.50	0.176

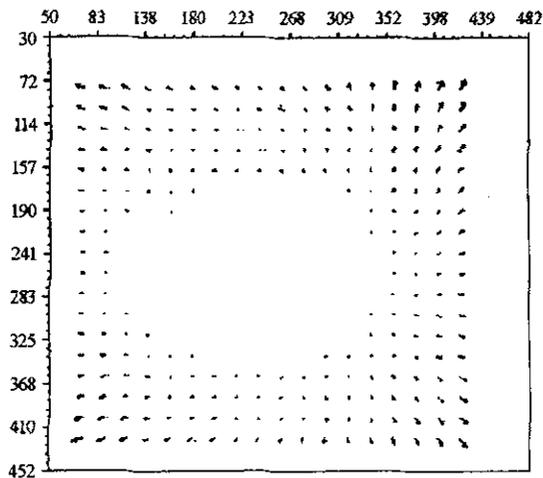


图4 像差矢量图

Fig.4 The deviation vector

图5是待检测目标的左右图像,同样将检测到的特征点用“+”字丝标出。三维重建的结果列在表1中。从结果可以看出,在实验中视场大小的三维测量的相对误差可控制在0.6%以内,标定控制点增

加,可适当提高标定精度。结果误差偏大的一个重要原因是实验条件所限。因为实验中网格是粘贴在标定板上的,这将影响到标定控制点的空间位置的精度。另外,网格结点的提取也是有误差的,也影响到标定精度。

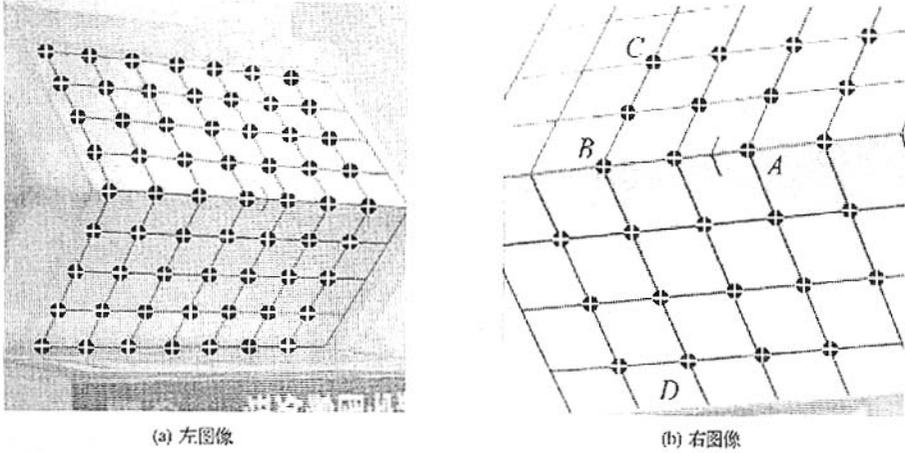


图5 用来检验标定结果的左右图像序列  
Fig.5 The image stereo for testing the algorithm

## 4 结论

本文提出一种基于仿射近似的摄像机标定法。根据实验结果可得出以下结论:

(1)对于航空拍摄条件来说,控制点往往离摄像机较远。直接用透视投影模型算出来的投影矩阵精度很差,导致后来搜索次数比较大,而采用本文算法可有效克服这个问题,从而提高标定精度。

(2)由于最后都是基于透视投影模型进行优化,因此最终精度都差不多,除非由于初始值精度太差导致算法不收敛的情况。

(3)指定主点对算法也很重要。因为主点的求解是在病态条件下进行的,易受噪声影响。况且随着现代工艺水平的提高,主点与图像中心的偏差已经非常小。另外,主点误差对最终测量误差影响非常小。

(4)由于摄像机模型是非常复杂的,牵涉到的参数非常多,因此如果初始值选择不好,可能会收敛到一个错误值,虽然这是以重投影残差和为极小值的点。

## 参考文献:

- [1] Banerjee S. Camera Models and Affine Multiple Views Geometry [J/OL]. <http://www.cse.iitd.ernet.in/suban/vision/affine.pdf>.
- [2] Hollinghurst N, Cipolla R. Uncalibrated Stereo Hand-Eye Coordination [J]. Image Vision Computer, 1994, 12(3): 187-192.
- [3] 马颂德, 张正友. 计算机视觉-理论与算法基础[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [4] 于起峰, 等. 基于图像的精确定量与运动测量[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [5] 邱志强, 唐力铁, 于起峰. 用神经网络变易有效焦距的摄像机标定法[J]. 国防科技大学学报, 2002(5).

