第 28 卷第 1 期　　国防科技大学学报　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　　Vol.28 No.1 2006

文章编号:1001-2486(2006)01-0117-04

非线性随机动态响应的高效模拟方法*

张书俊,任钧国

(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘　要:提出了一种分析多自由度非线性系统在随机激励下响应的高效模拟方法。该方法以蒙特卡罗方法为基础,针对动态问题,建立了有效的重要性判别准则,采用俄罗斯轮盘赌与分裂方法来处理响应样本,增加了样本在低失效概率区域出现的几率,提高了模拟效率。通过两个算例表明,该方法操作简单,可以大大地减少计算量,能够适用于实际的工程问题。

关键词:随机响应;数值模拟;动态系统;非线性

中图分类号:O342　　**文献标识码**:A

Efficient Simulation Procedures for Stochastic Analysis of Nonlinear Dynamical Systems

ZHANG Shu-jun,REN Jun-guo

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Tech, Changsha 410073, China)

Abstract:An efficient simulation procedure for stochastic analysis of nonlinear dynamical systems with multi-degree freedom based on Monte Carlo simulation (MCS) is presented. A simple criterion was established for indicating the importance of each dynamical response sample. According to this criterion, Russian Roulette and Split (RRS) method was applied to deal with the selected samples. The efficiency of this algorithm was much higher than that of direct MCS while the number of response samples in the low probability regions was increased. The result of evaluated examples demonstrates that the methodology presented in this paper has the advantage of being simple in operation, thus applicable to realistic engineering calculation.

Key words:stochastic response; numerical simulation; dynamical systems; nonlinear

自从 20 世纪 50 年代以来,随着飞机、导弹和载人航天技术的发展,结构可靠性特别是动力可靠性问题引起了人们的关切和重视。近年来,国内外许多学者对结构动力可靠度分析进行了广泛的研究,主要研究对象为线性系统,响应为平稳过程。对于非线性系统,因为叠加原理不再适用[1],因而与线性系统随机振动有本质的区别。当前对非线性振动的研究,考虑的模型一般比较简单,以至于不能反映确定性结构力学的当前发展水平。大多数能用的方法(如那些基于 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程的方法)已经相当成熟,然而当这些方法应用于多自由度(大于 10)系统时,会发现它们往往缺乏通用性,从而失去实用性[2]。因此已经建立起来的理论成果,在许多重要的工程领域并未得到充分的应用。可以说,对于多自由度非线性系统而言,至今还没有一个令人满意的解析方法。对于复杂结构的非线性随机动力响应问题,就目前的研究状况而言,最适合方法是 Monte Carlo 模拟方法(MCS)。Monte Carlo 方法应用于结构问题的一个最大优点是它的通用性,而且收敛速度与问题的维数无关,因此处理多自由度非线性系统没有实质的困难。Monte Carlo 方法不需要将非确定性问题转化为确定性问题,可以直接从非确定性问题出发,通过模拟原问题的实际过程得到问题的解,因此可以应用现有的确定性分析程序,或大型通用的商业软件。

本文基于 Monte Carlo 方法,采用俄罗斯轮盘赌与分裂方法来处理响应样本,建立了非线性系统动态响应样本重要性的判别准则,增加了样本在低失效概率区域出现的几率,探讨了提高抽样效率的方法。为实际工程中的多自由度非线性随机系统振动问题(如火箭发动机药柱的动态可靠性分析)提供了可操

* 收稿日期:2005-06-10
作者简介:张书俊(1976—),男,博士生。

作的方法。

1 俄罗斯轮盘赌与分裂(RRS)方法

应用 Monte Carlo 模拟方法(MCS)估计非线性结构的可靠性时,低失效概率的信息往往不能充分得到。例如当抽样 1000 时,极有可能没有一次落到失效域内。换句话说,相当多的运算量花费在没用的抽样上。直接 Monte Carlo 模拟方法(DMCS)的缺点已被广泛认识到,因此人们发展了所谓的方差缩减技术。这些程序都是增加在感兴趣区域内 Monte Carlo 实现的密度,即对总失效概率贡献最大的实现[3]。这些方差缩减技术广泛地应用于静态问题,其中最常见的是重要抽样方法。然而,由于动态问题中没办法定义重要抽样函数,从而也得不到原抽样函数与重要抽样函数的比值,因而不能直接把重要抽样方法应用于动态问题中。

对于白噪声这种简单激励,文献[4]结合白噪声的简单模拟方法,提出了一种直接地把静态重要抽样应用到动态系统的途经。显然,这种方法通用性欠佳,对于复杂的激励是行不通的。比较通用的 D&C 方法[3],会影响样本的统计特性,高阶矩通常会被估计过低。

本文考虑采用俄罗斯轮盘赌和分裂(RRS)技术,此项技术通过设置不同区域的重要性来实现。不同区域重要性代表对不同区域的关心程度,对于关心的区域设置高的重要性,不关心的区域设置较低的重要性。模拟时样本从非重要性区进入重要性区后的样本分裂成 N(N 即为样本进入前后的区域重要性之比)个样本,每个样本权重变为原来的 $1/N$,这样在非重要性区域计算的样本数目减少,在重要性区域由于分裂技巧的应用,抽样的样本数目大大增加,而最终的统计值也不受影响。合理运用分裂技巧可以在初始抽样粒子数较少的情况下得到较小的统计误差[5]。

2 判断重要区域

针对判断样本是否处于重要区域,文献[3]建立了一个系统能量准则,即针对每一个样本,根据系统的能量和外激励所做的功得到该样本所对应的参数,然后根据其参数的大小,通过 RRS 方法修改其权重。该方法最大的缺陷是为了保持程序的稳定性,针对不同的系统要建立不同的能量准则,缺乏通用性。为了克服上述困难,文献[6]进一步把能量准则发展为几何准则,其核心思想是使样本在相空间内均匀分布,即在密集的区域内的样本将比在稀疏区域内的样本更可能被淘汰,反之,在稀疏的区域内的样本将比在密集区域内的样本更可能被分裂。由于只使用几何准则,这种方法比较通用。但在判断疏、密区域时,需要反复用到二叉树结构,计算异常复杂。

本文结合上述思想,在计算开始时,赋予每一个样本相同的权重,$w_i(t)=1/nSim$,$t=0$,$i=1,2,\cdots,nSim$,其中 $nSim$ 为样本总数。在每一个载荷步计算得到响应样本后,对其进行统计,可以得到每一个响应样本所在区域的概率值 $P_i(t)$。根据权重大、概率小的样本应该优先分裂的原则,设计重要性指标 $v_i(t)=w_i(t)/P_i(t)$。同时建立重要性判别准则:重要性指标大的样本趋于重要区域,反之趋于非重要区域。这种判别标准,比能量法更具广泛性,比几何法简单,计算量小。结合俄罗斯轮盘赌和分裂(RRS)方法:在低失效概率区域、权重大的响应样本优先被分裂,同时权重减小;反之,优先被轮盘赌,同时权重增加。这种方法可以保证样本趋于均匀分布,能够得到低概率区域的信息。

3 算例

3.1 范德波-瑞利振子对白噪声的响应[7]

运动方程为

$$\ddot{Y}+k(-1+Y^2+\dot{Y}^2)\dot{Y}+Y=\sqrt{D}\xi(t) \tag{1}$$

式中 k 与 D 为正常数,$\xi(t)$为单位强度高斯白噪声。用 Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK)方程法可得到其精确平稳响应概率密度为

$$p_s(y,\dot{y})=N^{-1}\exp\left\{\frac{k}{D}\left[(y^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(y^2+\dot{y}^2)^2\right]\right\} \tag{2}$$

其中归一化常数

$$N=\sqrt{\frac{\pi D}{8k}}\mathrm{e}^{k/2D}erfc\left(-\sqrt{\frac{k}{2D}}\right) \tag{3}$$

取 $k=0.20$，$D=0.20$，时间步长取 0.025s。图 1 显示了概率密度精确解、直接 MCS 模拟（DMCS）与改进的 MCS 模拟（RRSMCS）结果的比较。DMCS 与 RRSMCS 的样本容量均为 2000，响应时间为 400s。从图 1(a)中可以看出，在整体的趋势上，RRSMCS 结果更加接近于精确解。图 1(b)是图 1(a)的局部放大，可以看出，在低失效区域，RRSMCS 优势更加明显。在低概率区域，后者样本出现的数量较多，能够更准确地估计低失效概率。

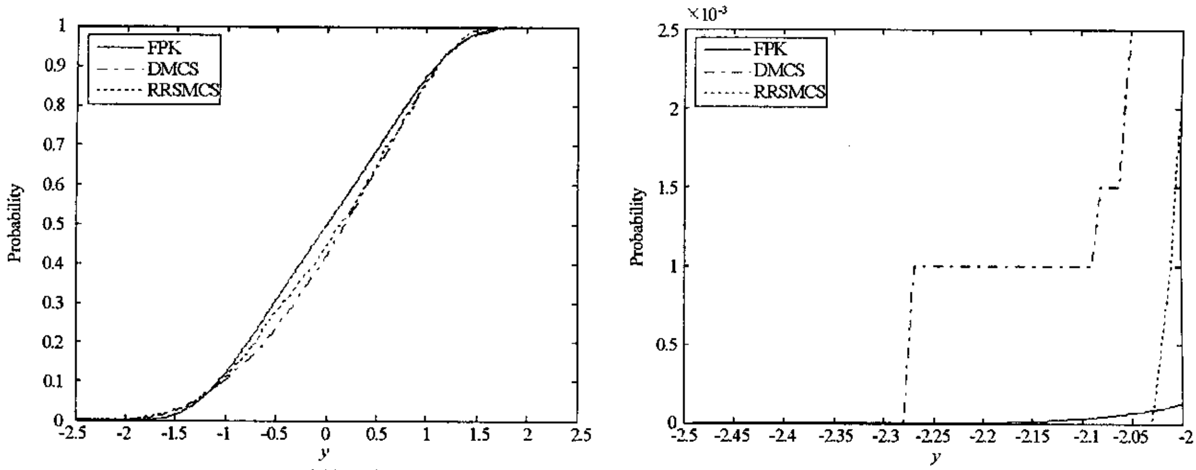


图 1　范德波 – 瑞利振子对白噪声的响应概率

Fig.1　Probability of white noise excited van der Pol-Rayleigh oscillator

3.2　剪切框架结构对地震载荷的响应[6]

10 层剪切框架结构相对位移的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{X}}+2\xi_0\omega_0\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{X}}+\omega_0^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}+\varepsilon\boldsymbol{X}^3)=\boldsymbol{F}a_g(t) \tag{4}$$

其中

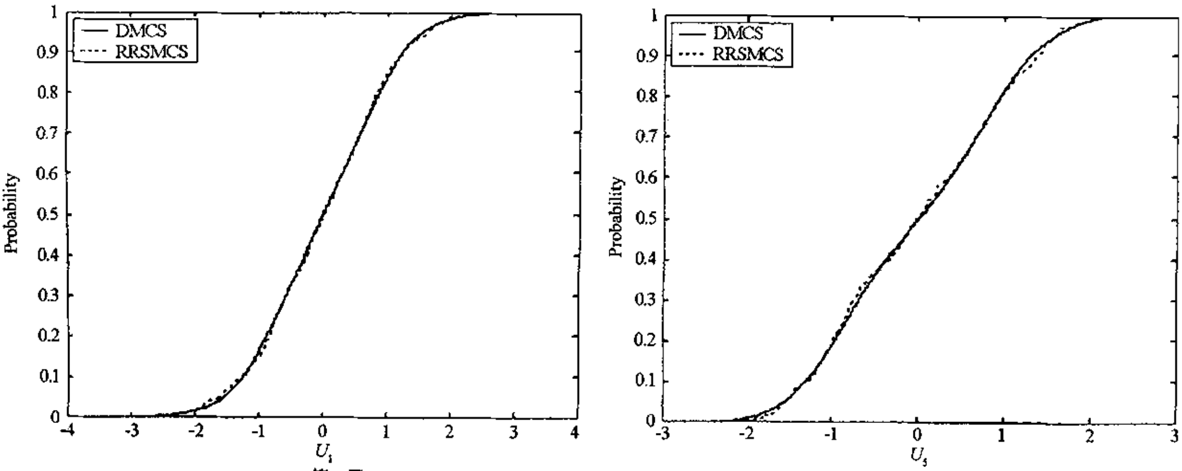
$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{X}^3=\begin{bmatrix}x_1^3\\ x_2^3\\ \vdots\\ x_{10}^3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

$a_g(t)$为水平地面加速度，可以表示为零均值单位白噪声乘以演变函数

$$h(t)=2.32[\exp(-0.09t)-\exp(1.49t)]$$

取 $\omega_0=10\pi\mathrm{s}^{-1}$，$\xi_0=0.067$，$\varepsilon=8.0$。响应时间取 6s，时间步长取 0.025s。标准化第 i 层的位移为 $U_i=\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}$，其中 x_i 为第 i 层的位移，μ_i 和 σ_i 分别为 x_i 的均值和标准差。

DMCS 样本容量为 10000，RRSMCS 样本容量为 1000。从图 2 可以看出，两者的模拟结果吻合得很好。而后者只使用较少的抽样次数，只需要较少的计算时间就保证了较高的精度。



(a) 第一层
(a) First floor

(b) 第五层
(b) Fifth floor

图2 剪切框架结构对地震载荷的响应概率
Fig.2 Probability of earthquake excited shear frame

4 结论

非线性系统的随机振动,特别是非平稳随机激励下复杂系统的动态响性的求解,目前最合适的方法只有 Monte Carlo 模拟方法(MCS)。相对于静态问题,动态随机模拟还没有通用有效的方差缩减技术。本文根据样本响应量的统计特性,建立了样本重要性的判断标准,并采用俄罗斯轮盘赌和分裂(RRS)技术处理样本,保证统计值不受影响。算例表明,该方法只需要较少抽样,就可以达到较高的精度,特别是在低失效区域,与解析解吻合得很好。考虑到结构的失效概率一般都很小,本文提出的方法可以进一步发展,用于非线性结构动态响应的失效概率的估计。

参考文献:

[1] 钟万勰.应用力学对偶体系[M].北京 科学出版社,2002.

[2] Schueller G I, Pradlwarter H J, Bucher C G. Efficient Computational Procedures for Reliability Estimations of MDOF-systems[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1991, 26(6):961–974.

[3] Pradlwarter H J, Schueller G I. And Melnikov P G. Reliability of MDOF Systems [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1994, 14:235–243.

[4] 吴斌,欧进萍,等.结构动力可靠度的重要抽样法[J].计算力学学报,2001,18(4):478–482.

[5] 裴鹿成.蒙特卡罗方法及其在粒子输运问题中的应用[M].北京 科学出版社,1980.

[6] Harnpornchai N, Pradlwarter H J, Schueller G I. Stochastic Analysis of Dynamical Systems by Phase-space-controlled Monte Carlo Simulation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 168:273–283.

[7] 朱位秋.随机振动[M].北京 科学出版社,1998.