

航天器编队飞行构形保持与重构的继电型控制*

孟云鹤 戴金海

(国防科技大学 航天与材料工程学院 湖南 长沙 410073)

摘要 研究小偏心参考轨道航天器编队飞行构形保持与重构控制的工程实现技术。首先给出相对运动状态转移矩阵,并推导出常推力控制情况下相对运动状态递推的解析表达式,进而给出脉冲推力、连续变推力和继电型推力三种发动机的推力模型和示意图。分别将等速度冲量的三种推力模型代入相对运动状态转移矩阵中,比较相同条件下相对运动控制作用效果的差异,理论推导结果表明:在一阶意义上,三种推力模型对相对运动控制作用等效,因而航天器编队构形保持与重构控制可以基于继电型推力模型来实现。

关键词 航天器编队飞行 构形保持 构形重构 脉冲推力 连续变推力 继电型推力 控制

中图分类号 :V448 文献标识码 :A

Bang-Bang Control for Maintenance and Reconfiguration of Spacecraft Formation Flying

MENG Yun-he, DAI Jin-hai

(College of Astronautics and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract In this paper, the enabling technique of maintenance and reconfiguration control of spacecraft formation flying is studied. First, the state transfer matrix of relative motion was introduced and the expression of relative motion with constant thrust control was deduced. Then, 3 models of thrust were illustrated, which are impulse thrust, continuous thrust and Bang-Bang thrust. With the state transfer matrix, the differences of the thrust models in relative motion control were explored. Results show that in first order means the relative motion control effects with impulse thrust, continuous thrust and Bang-Bang thrust control are equivalent. So the problem of maintenance and reconfiguration of spacecraft formation flying could be implemented with Bang-Bang thrust control.

Key words spacecraft formation flying; maintenance; reconfiguration; impulse thrust; continuous thrust; bang-bang thrust; control

航天器编队飞行技术是当前航天技术的研究热点,构形控制是其中的关键技术。构形控制包括构形保持与重构两个方面^[1-4]。实现高精度的编队构形控制离不开相对运动分析、相对测量与微推力发动机技术^[5-7],这代表了技术发展的趋势。

文献[1-4]中控制系统设计的共同点在于都要求使用连续变推力发动机实现构形控制,然而这在工程实现上的技术难度非常大,因为当前还没有制造出能够任意改变推力大小的发动机。为了改变这种理论分析与工程实际不一致的现状,有必要特别地研究编队构形控制的发动机实现技术。为涵盖当前微推力发动机的特性,在文献[8]的基础上提出脉冲推力(或称冲量作用)和继电型(Bang-Bang)微推力模型的概念。

1 相对运动方程的状态转移矩阵

首先建立参考轨道坐标系,原点设在航天器编队的几何中心点, ox 轴取为中心点的径向方向, oz 轴沿主航天器轨道面正法线方向, oy 轴由右手法则确定。

小偏心率参考轨道相对运动动力学方程可以写成如下形式:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1)$$

* 收稿日期 2005-08-31

基金项目 国家部委基金项目(51421050203KG01)

作者简介 孟云鹤(1978—)男,博士生。

其中 $X = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$ 为状态矢量, $U = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ 为控制矢量, A 和 B 分别为状态系数矩阵和控制系数矩阵, 具体为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

由此, 状态方程(1)的解为:

$$X(t) = \Phi(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BU(\tau)d\tau \quad (3)$$

其中,

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 4 - 3\cos nt & 0 & 0 & \sin nt/n & 2(1 - \cos nt)/n & 0 \\ 6(-nt + \sin nt) & 1 & 0 & 2(-1 + \cos nt)/n & -3t + 4\sin nt/n & 0 \\ 3n\sin nt & 0 & 0 & \cos nt & 2\sin nt & 0 \\ 6n(-1 + \cos nt) & 0 & 0 & -2\sin nt & -3 + 4\cos nt & 0 \\ 0 & 0 & -n\sin nt & 0 & 0 & \cos nt \end{bmatrix} \quad (4)$$

$\Phi(t - t_0)$ 为状态转移矩阵, t_0 为初始时刻。式(3)表明, 已知初始时刻的状态及以后的控制, 可以确定任意时刻的相对运动状态。

当 $U = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ 为常值时, 可进一步推导得出式(3)中积分部分的解析表达:

$$W(\Delta t) \triangleq W(t - t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BU(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{n^2}(1 - \cos n\Delta t)u_x + \frac{2}{n^2}(n\Delta t - \sin n\Delta t)u_y \\ -\frac{2}{n^2}(n\Delta t - \sin n\Delta t)u_x + \left[-\frac{3}{2}\Delta t^2 + \frac{4}{n^2}(1 - \cos n\Delta t)\right]u_y \\ \frac{1}{n^2}(1 - \cos n\Delta t)u_z \\ \frac{1}{n}\sin n\Delta t \cdot u_x + \frac{2}{n}(1 - \cos n\Delta t)u_y \\ -\frac{2}{n}(1 - \cos n\Delta t)u_x + \left[-3\Delta t + \frac{4}{n}\sin n\Delta t\right]u_y \\ \frac{1}{n}\sin n\Delta t \cdot u_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

由此可知, 当控制加速度为常值时, 相对运动状态可以由下式直接递推出:

$$X(t) = \Phi(t - t_0)X(t_0) + W(t - t_0) \quad (6)$$

2 发动机推力的三种模型

2.1 说明与假设条件

首先介绍发动机推力作用的三种模型, 即脉冲推力、连续变推力和继电型推力。认为脉冲推力的作用时间趋近于零, 作用前后航天器的空间位置不变, 而速度矢量突然沿推力矢量获得某个改变量; 连续推力模型即大小与方向都连续变化的推力, 由于实现航天器编队构形重构时, 一般需反馈相对速度与位置以及其偏差量^[1], 所需控制力是与轨道周期基本一致的三角函数形式, 这里不妨把推力写成 $F(\sin nt, \cos nt)$ 形式, 继电型推力大小恒定, 作用时间长短可调, 目前的脉冲调宽式微推力发动机基本上可以由此表达^[7]。

研究等速度冲量的三种推力模型的相对运动控制作用效果。首先把一个轨道周期 T 的连续变推力控制作用划分为 N 等分, 每份时间长度为 T/N , 记为 $\Delta T = T/N$, 研究在 $[t_0, t_0 + \Delta T]$ 的一段时间内的推力作用效果。如图 1 所示, 其中细虚线表示连续推力作用, 作用时段为 $[t_0, t_0 + \Delta T]$; 中间粗虚线表示冲量作用, 时刻为 $t_0 + \frac{\Delta T}{2}$; 而其中的粗实线表示继电型推力作用, 作用时段为 $[t_0 + \frac{\Delta T - \Delta t_k}{2}, t_0 + \frac{\Delta T + \Delta t_k}{2}]$ 。三种推力作用的冲量是相同的, 不妨设冲量为 $\Delta V_{3 \times 1}$, 继电型推力作用加速度为 u_B , 连续推力作用加速度为 $u_C(t)$, 则有 $\Delta V_{3 \times 1} = u_B \cdot \Delta t_k = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} u_C(t) \cdot dt$ 成立。

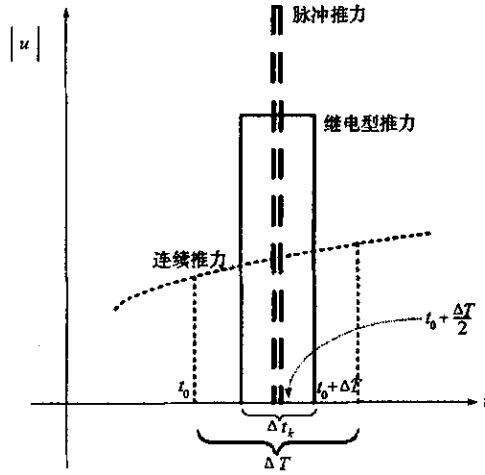


图 1 三种推力模型

Fig. 1 Models of the thrust

有了三种推力模型的数学表达, 根据式 (6) 给出的相对运动状态地递推矩阵就可以进行三种推力模型控制作用效果的分析了。分别用下标 I_p, C, B 表示脉冲推力、连续推力、继电型推力的控制作用。

2.2 三种推力模型的控制作用

分别研究等速度冲量 $\Delta V_{3 \times 1} = [\Delta V_x \quad \Delta V_y \quad \Delta V_z]^T$ 的三种推力在相对运动控制中的作用效果。

2.2.1 脉冲推力作用效果分析

由于脉冲推力模型最为简单, 先给予分析, 施加控制后在 $t_0 + \Delta T$ 时刻的相对运动状态为

$$X_{I_p}(t_0 + \Delta T) = \Phi\left(\frac{\Delta T}{2}\right) \left\{ X\left(t_0 + \frac{\Delta T}{2}\right) + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \Delta V_{3 \times 1} \end{bmatrix} \right\} = \Phi(\Delta T)X(t_0) + \Phi\left(\frac{\Delta T}{2}\right) \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \Delta V_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

由于无推力控制作用的状态为 $X_C(t_0 + \Delta T) = \Phi(\Delta T)X(t_0)$, 则脉冲推力作用的效果为

$$\Delta X_{I_p}(t_0 + \Delta T) = X_{I_p}(t_0 + \Delta T) - X_C(t_0 + \Delta T) = \Phi\left(\frac{\Delta T}{2}\right) \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \Delta V_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 $\Delta V_{3 \times 1} = [\Delta v_x \quad \Delta v_y \quad \Delta v_z]^T$;

由于 $\frac{\Delta T}{2} = \frac{T}{2N}$, 当 N 足够大时, $\frac{\Delta T}{2}$ 为轨道周期的一阶小量, 化简转移矩阵 $\Phi(\Delta T)$, 分别将位置、速度状态保留二阶小量, 略去三阶以上小量, 则

$$\Phi(\Delta T) = \begin{bmatrix} 1 + 3n^2\Delta T^2/2 & 0 & 0 & \Delta T & n\Delta T^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -n\Delta T^2 & \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 1 - n^2\Delta T^2/2 & 0 & 0 & \Delta T \\ 3n^2\Delta T & 0 & 0 & 1 - n^2\Delta T^2/2 & 2n\Delta T & 0 \\ -3n^2\Delta T^2 & 0 & 0 & -2n\Delta T & 1 - 2n^2\Delta T^2 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2\Delta T & 0 & 0 & 1 - n^2\Delta T^2/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式,可以得到脉冲推力模型施加速度冲量 $\Delta V_{3 \times 1}$ 的控制作用效果为

$$\Delta X_{lp}(t_0 + \Delta T) = \Phi\left(\frac{\Delta T}{2}\right) \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \Delta V_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta v_x \Delta T + \frac{1}{4} n \Delta v_y \Delta T^2 \\ \frac{1}{2} \Delta v_y \Delta T - \frac{1}{4} n \Delta v_x \Delta T^2 \\ \frac{1}{2} \Delta v_z \Delta T \\ \Delta v_x + n \Delta T \Delta v_y - \frac{1}{8} n^2 \Delta v_x \Delta T^2 \\ \Delta v_y - n \Delta T \Delta v_x - \frac{1}{2} n^2 \Delta v_y \Delta T^2 \\ \Delta v_z - \frac{1}{8} n^2 \Delta v_z \Delta T^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.2.2 继电器推力作用效果分析

对于继电器推力作用,在参考系中速度冲量矢量为 $\Delta V_{3 \times 1} = [\Delta v_x \ \Delta v_y \ \Delta v_z]^T$,加速度矢量为 $u_B = [u_{Bx} \ u_{By} \ u_{Bz}]^T$ 时,则三轴作用时间分别为 $\Delta t_{kx} = \frac{\Delta v_x}{u_{Bx}}$, $\Delta t_{ky} = \frac{\Delta v_y}{u_{By}}$, $\Delta t_{kz} = \frac{\Delta v_z}{u_{Bz}}$ 。为了简便,把加速度写成时间函数形式,如式(11)所示,而在计算中时间统一用 Δt_k 表达。

$$\begin{cases} u_{Bx}(t) = \begin{cases} u_x & t \in [t_0 + (T_0 - t_{kx})/2, t_0 + (T_0 + t_{kx})/2] \\ 0 & t \notin [t_0 + (T_0 - t_{kx})/2, t_0 + (T_0 + t_{kx})/2] \end{cases} \\ u_{By}(t) = \begin{cases} u_y & t \in [t_0 + (T_0 - t_{ky})/2, t_0 + (T_0 + t_{ky})/2] \\ 0 & t \notin [t_0 + (T_0 - t_{ky})/2, t_0 + (T_0 + t_{ky})/2] \end{cases} \\ u_{Bz}(t) = \begin{cases} u_z & t \in [t_0 + (T_0 - t_{kz})/2, t_0 + (T_0 + t_{kz})/2] \\ 0 & t \notin [t_0 + (T_0 - t_{kz})/2, t_0 + (T_0 + t_{kz})/2] \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

在应用继电器推力控制时,在 $t_0 + \Delta T$ 时刻的相对运动状态为

$$X_B(t_0 + \Delta T) = \Phi\left(\frac{\Delta T - \Delta t_k}{2}\right) X\left(t_0 + \frac{\Delta T + \Delta t_k}{2}\right) = \Phi(\Delta T) X(t_0) + \Phi\left(\frac{\Delta T - \Delta t_k}{2}\right) W(\Delta t_k) \quad (12)$$

因而继电器推力控制作用效果为

$$\Delta X_B(t_0 + \Delta T) = X_B(t_0 + \Delta T) - X(t_0 + \Delta T) = \Phi\left(\frac{\Delta T - \Delta t_k}{2}\right) W(\Delta t_k) \quad (13)$$

而式(5)给出的 $W(\Delta t)$ 可以简化为

$$W(\Delta t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 u_x + \frac{1}{3} n \Delta t^3 u_y \\ \frac{1}{2} \Delta t^2 u_y - \frac{1}{3} n \Delta t^3 u_x \\ \frac{1}{2} \Delta t^2 u_z \\ \Delta t \cdot u_x + n \Delta t^2 u_y \\ \Delta t \cdot u_y - n \Delta t^2 u_x \\ \Delta t \cdot u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta v_x \Delta t + \frac{1}{3} n \Delta v_y \Delta t^2 \\ \frac{1}{2} \Delta v_y \Delta t - \frac{1}{3} n \Delta v_x \Delta t^2 \\ \frac{1}{2} \Delta v_z \Delta t \\ \Delta v_x + n \Delta t \cdot \Delta v_y \\ \Delta v_y - n \Delta t \cdot \Delta v_x \\ \Delta v_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

把式(9)(14)代入式(13)中,并略去高阶小量,可以得到继电器推力控制作用的效果:

$$\Delta X_B(t_0 + \Delta T) = \Phi \left(\frac{\Delta T - \Delta t_k}{2} \right) \mathbf{W}(\Delta t_k) \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta v_x \Delta T + n \Delta v_y \left(\frac{\Delta T^2}{4} + \frac{\Delta t_k^2}{12} \right) \\ \frac{1}{2} \Delta v_y \Delta T - n \Delta v_x \left(\frac{\Delta T^2}{4} + \frac{\Delta t_k^2}{12} \right) \\ \frac{1}{2} \Delta v_z \Delta T - \frac{1}{16} n^2 \Delta v_x (\Delta T - \Delta t_k)^2 \Delta t_k \\ \Delta v_x + n \Delta v_y \Delta T - \frac{1}{8} n^2 \Delta v_x [\Delta T^2 - 8 \Delta T \Delta t_k + 7 \Delta t_k^2] \\ \Delta v_y - n \Delta v_x \Delta T - \frac{1}{2} n^2 \Delta v_y [\Delta T - \Delta t_k]^2 \\ \Delta v_z - \frac{1}{8} n^2 \Delta v_x [\Delta T^2 - \Delta t_k^2] \end{bmatrix} \quad (15)$$

2.2.3 连续推力作用效果分析

对于连续变推力控制的情况,推力变化周期与轨道周期基本一致,写成如 $F(\sin nt, \cos nt)$ 形式时,由于只研究在 $[t_0, t_0 + \Delta T]$ 时间段的作用效果,可知连续推力加速度在此期间的变化幅度不大,这是因为当 $\tau \in [0, \Delta T]$ 时, $\sin[n(t_0 + \tau)] = \sin nt_0 \cos n\tau + \sin n\tau \cos nt_0 \approx \sin nt_0 + n\tau \cos nt_0 - \frac{n^2 \tau^2}{2} \cos nt_0 + o(n^2 \tau^2)$, 其变化幅度最大为 $n\Delta T$, 当 N 取得足够大, $n\Delta T$ 可视为一阶小量。

因而,可以采用平均控制加速度 $\bar{u}_C = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} u_C(t) \cdot dt$ 来代替 $u_C(t)$ 进行作用效果分析时,有理由认为其偏差量为二阶以上的小量。

研究此种情况下的作用效果,可以把 $\Delta t_k = \Delta T$ 直接代入式(15),这时得到:

$$\Delta X_C(t_0 + \Delta T) = \Phi(\Delta T) X(t_0 + \Delta T) + \mathbf{W}(\Delta T) - X(t_0 + \Delta T) = \mathbf{W}(\Delta T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta v_x \Delta T + \frac{1}{3} n \Delta T^2 \Delta v_y \\ \frac{1}{2} \Delta v_y \Delta T - \frac{1}{3} n \Delta T^2 \Delta v_x \\ \frac{1}{2} \Delta v_z \Delta T \\ \Delta v_x + n \Delta T \cdot \Delta v_y \\ \Delta v_y - n \Delta T \cdot \Delta v_x \\ \Delta v_z \end{bmatrix} \quad (16)$$

2.3 三种作用的比较

从式(10)(15)(16)的结果可以看出在三种推力模型中,继电型推力作用的情况是一种一般情况,当推力作用时间 $\Delta t_k \Rightarrow \Delta T$ 时,则可以得到连续变推力的理想情况;当 $\Delta t_k \Rightarrow 0$ 时,可以得到脉冲推力的理想情况。因而可以得到三种作用效果的最大偏差范围:

$$\Delta E = \left| \max_{\Delta t_k \in [0, \Delta T]} \Delta X_B(t_0 + \Delta T) - \min_{\Delta t_k \in [0, \Delta T]} \Delta X_B(t_0 + \Delta T) \right| = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} n |\Delta v_y| \Delta T^2 \\ \frac{1}{12} n |\Delta v_x| \Delta T^2 \\ \frac{1}{108} n^2 |\Delta v_x| \Delta T^2 \\ \frac{9}{56} n^2 |\Delta v_x| \Delta T^2 \\ \frac{1}{2} n^2 |\Delta v_y| \Delta T^2 \\ \frac{1}{8} n^2 |\Delta v_z| \Delta T^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

当 N 足够大时, $n\Delta T = 2\pi \cdot \Delta T / T = 2\pi / N$ 较小,而在式(17)中还存在较小的系数,如 $1/12$, $1/108$ 等。由此等速度冲量的三种推力模型对相对位置控制作用的偏差为一阶小量,而相对速度偏差至少是一阶小量,这说明在适当地划分“控制小区间”的情况下,三种推力模型的控制作用效果在一阶意义上等效,这就为研究航天器编队的构形控制提供了方便。

3 结论

在相对运动控制中,连续变推力、继电器推力和冲量三种发动机模型在一阶意义上是等效的,彼此之间可以相互转换。在进行航天器编队构形控制系统的分析与设计时可以使用连续变推力模型,这可以简化分析设计工作,而在工程上为编队航天器配置发动机时,基于继电器推力或脉冲推力模型可以大大扩宽选择面,从而降低工程实现的难度。

参考文献:

- [1] Schaub H, Vadali S R, Junkins J L, et al. Spacecraft Formation Flying Control Using Mean Orbit Elements[A]. In AAS Astrodynamics Specialist Conference[C], Greenwood, Alaska, Aug. 16-18, 1999.
- [2] Tillerson M, Inalhan G, How J. Coordination and Control of Distributed Spacecraft Systems Using Convex Optimization Techniques[D]. Master's Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [3] Vadali S R, Vaddi S S, Alfriend K T. An Intelligent Control Concept for Formation Flying satellite[J]. Int. J. Robust Nonlinear Control, 2002, 12: 97-115.
- [4] Armellin R, Massari M, Ercoli-Finzi A. Optimal Formation Flying Reconfiguration and Station Keeping Maneuvers Using Low-thrust Propulsor[A]. 18th International Symposium on Space Flight Dynamics, Munich, Germany, October 2004.
- [5] Scharl C A, Mikell I G, Mikell P G, et al. Pulsed Plasma Thruster Variations Forimproved Mission Capabilities[R]. AIAA2000-3260, 2000.
- [6] Jacobson D T, Manzella D M. NASA's Hall Thruster Program[R]. AIAA 2004-3600, 2004.
- [7] 张郁. 电推进技术的研究应用现状及其发展趋势[J]. 火箭推进, 2005, 31(2).
- [8] 杨嘉墀. 航天器轨道动力学与控制(下)[M]. 北京: 宇航出版社, 2002.

