

## MPSTD 算法在波导分析中的应用\*

姜永金,田立松,杨虎,毛钧杰

(国防科技大学 电子科学与工程学院 湖南 长沙 410073)

**摘要** 研究了多域伪谱时域(MPSTD)算法应用于波导问题分析时的激励源设置,并在此基础上,采用 MPSTD 算法计算了波导截止频率和典型三维波导结构的  $S$  参数,计算结果与 HFSS 或 FDTD 的计算结果做了比较,数值仿真表明,将 MPSTD 算法应用于波导问题的分析,可实现对波导问题的精确建模,具有较高的计算效率和计算精度,波导问题的 MPSTD 分析拓展了 MPSTD 算法的应用领域,为复杂波导问题的精确求解提供了一种思路。

**关键词** 多域伪谱时域(MPSTD)算法;激励源;波导

中图分类号:TN820.1 文献标识码:A

## Application of Multidomain Pseudospectral Time-domain in Waveguide

JIANG Yong-jin, TIAN Li-song, YANG Hu, MAO Jun-jie

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** The design of excitation sources was presented and the characteristic of waveguide was analyzed with multi-domain pseudospectral time-domain (MPSTD). The cut-off frequency of 2D waveguide and the  $S$  parameters of typical 3D waveguide model were calculated with the MPSTD. All numerical results were compared with the HFSS or the FDTD results, which display that the MPSTD is more accurate and efficient. This paper offers a scheme for analyzing the complex waveguide accurately, and extends the application field of MPSTD.

**Key words** multidomain pseudospectral time-domain; excitation sources; waveguide

时域有限差分方法<sup>[1]</sup>(FDTD)已经被广泛地应用于电磁波的散射、辐射和传播问题,然而要想达到可以接受的精度效果,每波长需要分成 10~20 个网格。改进 FDTD 的计算精度和效率一直是一个活跃的研究课题。在大量研究中,高阶方法和谱方法在计算电磁学中已经得到了越来越多的重视,对于 Maxwell 方程的时域求解,两种不同类型的伪谱方法已经被广泛应用,第一种是 Fourier 时域伪谱方法(FPSTD)<sup>[2-4]</sup>,第二种是多域伪谱方法(MPSTD)<sup>[5-12]</sup>。这两种时域伪谱方法的中心思想都是利用多项式来表达未知量及其空间导数,并以此来求解 Maxwell 方程。在均匀介质空间或者变化不大的非均匀介质空间,FPSTD 每波长只需两个网格就可以满足计算精度,然而将其用于复杂问题时,如曲面物体、金属物体和具有不连续材料分布的问题时,它的计算精度较低。MPSTD 方法克服了 FPSTD 的上述局限,不仅可以更好地模拟曲面物体、金属导体和准确地处理材料分界面,而且它与全域 PSTD 相比还有显著的优点<sup>[5-12]</sup>。MPSTD 的基本思想是将整个计算域分成几个与所分析问题共形的曲面六面体子域, Chebyshev PSTD 被单独用在每个子域里,子域之间通过子域匹配条件来处理。目前,MPSTD 算法已经被成功应用于空间及地下简单目标(球、圆柱、方柱)散射的研究<sup>[5,7-8,11]</sup>,在波导问题分析中的应用还尚未见文献报道。

### 1 电磁场中的多域伪谱算法

考虑一个无源的、各向同性、导电的不均匀媒质,其介电常数、磁导率和电导率分别为  $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$ 。对

\* 收稿日期 2005-11-05

作者简介 姜永金(1977—),男,博士生。

于 3D 矢量 Maxwell 方程的形式为:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \eta} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \zeta} + \mathbf{D} \mathbf{q} = 0 \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{q} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)^T \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_z/\epsilon & -\xi_y/\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_z/\epsilon & 0 & \xi_y/\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \xi_y/\epsilon & -\xi_x/\epsilon & 0 \\ 0 & -\xi_z/\mu & \xi_y/\mu & 0 & 0 & 0 \\ \xi_z/\mu & 0 & -\xi_x/\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_y/\mu & \xi_x/\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sigma/\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma/\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma/\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_m/\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_m/\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_m/\epsilon \end{pmatrix} \quad (3b)$$

其中  $\epsilon, \mu, \sigma$  均为坐标  $(x, y, z)$  的函数, 矩阵  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  的表达式只需将矩阵  $\mathbf{A}$  中的  $\xi$  分别换成  $\eta$  和  $\zeta$  即可。

对于 3D 问题, 假定计算域能被分成许多与所分析问题共形的无互叠区域的曲面六面体, 利用坐标变换, 每一个在  $(x, y, z)$  坐标系中的曲面六面体能变换到  $(\xi, \eta, \zeta)$  坐标系中的单位立方体。为了精确估计定义在单位立方体上的  $\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)$ , 采用基于 Chebyshev-Gauss-Lobatto 配置点的张量积 Chebyshev 方法。

定义在单位立方体上的 Chebyshev-Gauss-Lobatto 配置点为

$$\xi_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, I \quad (4)$$

$$\eta_j = -\cos\left(\frac{j\pi}{M}\right), \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (5)$$

$$\zeta_l = -\cos\left(\frac{l\pi}{M}\right), \quad l = 0, 1, \dots, L \quad (6)$$

采用张量积 Chebyshev-Lagrange 多项式  $\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)$  被给出:

$$\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^L \mathbf{q}(\xi_i, \eta_j, \zeta_l) g_i(\xi) g_j(\eta) g_l(\zeta) \quad (7)$$

式中, Lagrange 插值多项式

$$g_i(\alpha) = \frac{(1 - \alpha^2) T_N'(\alpha) (-1)^{i+1}}{c_i N^2 (\alpha - \alpha_i)} \quad (8)$$

这里  $\alpha = (\xi, \eta, \zeta)$ ,  $c_0 = c_N = 2$ ,  $c_i = 1$ ,  $N$  阶 Chebyshev 多项式为  $T_N(x) = \cos(N \arccos x)$

定义在网格点上的  $\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)$  的空间偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\xi_i, \eta_j, \zeta_l)}{\partial \xi} = \sum_{k=0}^I D_{ik}^{(\xi)} \mathbf{q}(\xi_k, \eta_j, \zeta_l) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\xi_i, \eta_j, \zeta_l)}{\partial \eta} = \sum_{k=0}^J D_{jk}^{(\eta)} \mathbf{q}(\xi_i, \eta_k, \zeta_l) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\xi_i, \eta_j, \zeta_l)}{\partial \zeta} = \sum_{k=0}^L D_{lk}^{(\zeta)} \mathbf{q}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (11)$$

式中  $D_{ik}^{(\alpha)} = g'_k(\alpha_i)$ , 微分矩阵  $\alpha = (\xi, \eta, \zeta)$

具体表达式可参见文献 [8]

### 2 波导中的激励源设置

以 X 波段 WR - 90 波导为例 ,波导的内壁尺寸为 22.86mm × 10.16mm ,波导宽壁为 x 方向 ,窄壁为 y 方向 ,传输方向为 z 方向。一根直波导被分成 4 个子域 ,两端为 PML 子域 ,激励源位于第二子域 ,如图 1 所示 ,每个子域 x , y 方向 Chebyshev 网格数目为 8 × 8 , z 方向除第二子域 Chebyshev 网格数为 20 外 ,其余子域为 8 ,子域之间通过子域分界面匹配条件交换信息 [12]。计算中时间步长  $\Delta t = 1.0\text{ps}$  ,在波导的两端加 CPML 吸收层 ,由文献 [13] 可取  $m = 2$  ,  $d_{\text{PML}} = 2.0\text{m}$  ,  $\alpha = 0.1$  ,  $\kappa_{\text{max}} = 30$  ,此时 CPML 具有好的吸收性能。

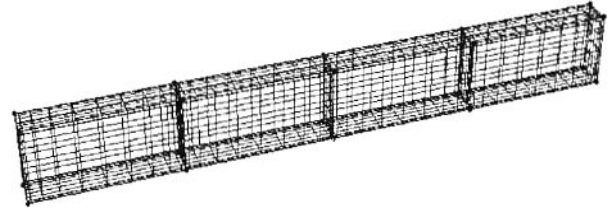


图 1 一根直波导的子域部分和网格点分布  
Fig.1 Subdomains decomposition and grid meshing of a straight waveguide

MPSTD 用于波导问题的计算时 ,为了避免 Gibb 现象的影响 ,一般采用空间分布的 Gaussian 脉冲激励 [8] ,由于波导中传输的是宽带时域信号 ,波导中的场分布没有解析表达式 ,在波导的窄壁方向 ,激励电场为均匀变化 ,在波导的宽壁方向 ,激励电场为一阶正弦变化 ,这样设置可使波源在波导横截面上的场分布和主模的场分布一致 [14] ,因此 ,激励源表达式取为

$$E_y(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2 \times dz^2}} \tag{12}$$

这里  $z_0$  为空间分布的 Gaussian 脉冲的中心  $2 \times dz$  为空间分布的 Gaussian 脉冲的带宽。此时 ,第三个子域中心点处的时域波形如图 2 所示。

由图 2 可知 ,采用 Gaussian 脉冲作为强迫激励源时 ,波导中场的时域波形有较长的拖尾 ,而在时域算法中 ,对于脉冲激励源是以计算区域中的场消失为迭代终止的标志 ,场消失越慢 ,就意味着计算时间越长 ,这对数值计算是很不利的。

时域波形的拖尾是由于在波导主模截止频率以下的频谱分量 ,场的传播速度接近于零 ,在时域上就是很长的拖尾 [14]。如果只关心某一中心频率附近的频谱分量 ,舍弃截止频率以下的频率分量 ,那么就可减小时域波形的拖尾。

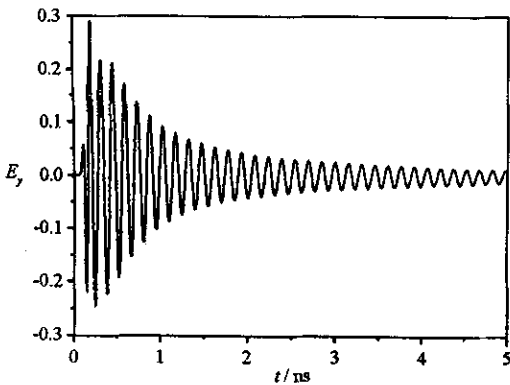


图 2 Gaussian 脉冲作为强迫激励源时 ,第三子域中心点处的时域波形

Fig.2 Time-domain waveform of the central point in 3<sup>rd</sup> subdomain when Gaussian pulse as the excitation source

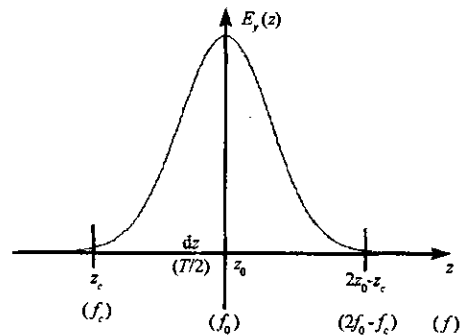


图 3 中心频率为  $f_0$  ,带宽为  $2f_0 - f_c$  的调制 Gaussian 脉冲示意图

Fig.3 Illustration of modulated Gaussian pulse with the central frequency  $f_0$  and the bandwidth  $2f_0 - f_c$

设所关心的中心频率为  $f_c$  (相应角频率为  $\omega_c$  ,波长为  $\lambda_0$  ,波导波长为  $\lambda_{g0}$ ) ,主模  $\text{TE}_{10}$  模的截止频率为  $f_c$  (相应角频率为  $\omega_c$  ,截止波长为  $\lambda_c$ ) ,由理论值可获得。取 Gaussian 脉冲的频宽  $\ll (f_0 - f_c)$  如图 3 所示。

频谱中心为  $\omega_0$  的 Gaussian 脉冲的归一化频域表达式为 [14]

$$E_y(x, \omega) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2 T^2}{4}} \quad (13)$$

通常取频谱的最大值小于 2% 时来定义 Gaussian 脉冲的频宽,此时,可得到求解  $d_z$  的表达式为

$$d_z \geq \frac{V_\varphi \sqrt{-\log(0.02)}}{\pi(f_0 - c/\lambda_c)} \quad (14)$$

式中,  $c$  为光速;  $V_\varphi$  为相速度,  $V_\varphi = f_0 \lambda_{g0}$ .

空间分布的 Gaussian 脉冲的归一化频域表达式可写为

$$E_y(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi f_0 z}{V_\varphi}\right) e^{-\frac{(z-z_0)^2}{(2 \times d_z)^2}} \quad (15)$$

当取  $f_0 = 10\text{GHz}$  时,由式(14)求得  $d_z \geq 0.0728$ ,取  $d_z = 0.08$ ,第三子域中心点处的时域波形如图 4 所示。

由图 4 可知,采用中心频率  $f_0$ ,带宽  $\leq \chi(f_0 - f_c)$  的调制 Gaussian 脉冲作为强迫激励源时,可使波导中场的时域波形拖尾变小,波导主模截止频率附近的频谱幅度小于  $-30\text{dB}$ 。

### 3 典型问题分析

为了研究 MPSTD 算法用于波导问题分析时的计算精度和效率,以两类问题为例做了分析,首先,采用一般形式的空间分布 Gaussian 脉冲激励源<sup>[8]</sup>,分别计算了空波导、部分介质填充波导以及遮蔽微带线结构的截止频率;其次,采用空间分布调制 Gaussian 脉冲激励源计算了典型波导弯头的  $S$  参数。

#### 3.1 波导截止频率的 MPSTD 分析

波导截止频率的计算,可以 2D 问题分析,空波导、介质填充波导以及遮蔽微带线三类问题的结构尺寸:空波导宽壁为  $a = 20\text{mm}$ ,窄壁为  $b = 10\text{mm}$ ,宽壁与窄壁的 MPSTD 剖分网格数目为  $20 \times 10$ ;介质填充波导结构以及 MPSTD 剖分如图 5(a)所示,填充介质为  $\epsilon_r = 11.7$ ,  $\mu_r = 1$ ,每个子域的网格数目为  $10 \times 10$ ;遮蔽微带线的结构以及 MPSTD 剖分如图 5(b)所示,其中  $a = 0.00127\text{m}$ ,  $b = 0.0127\text{m}$ ,介质基板  $\epsilon_r = 8.875$ ,  $\mu_r = 1$ ,每个子域的网格数目为  $10 \times 10$ 。

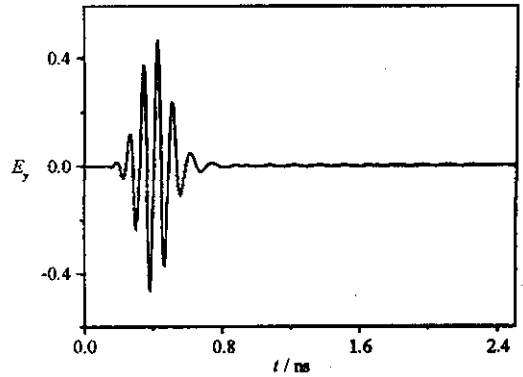


图 4 调制 Gaussian 脉冲作为强迫激励源时,第三个子域中心点处的时域波形

Fig. 4 Time-domain waveform of the central point in 3<sup>rd</sup> subdomain, when modulated Gaussian pulse as the excitation source

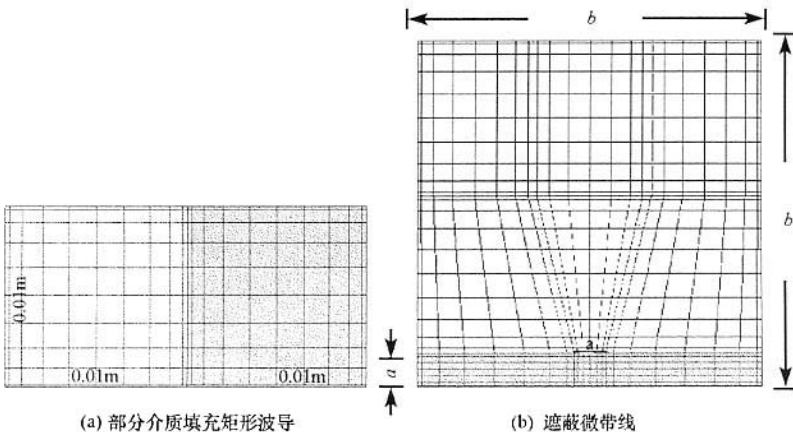


图 5 两类矩形波导问题的多域部分及其网格点分布

Fig. 5 Subdomains decomposition and grid meshing of two kinds of problems of rectangular waveguide

为了便于理解计算结果,误差分析采用式(16)计算。

$$e_f = \lfloor \frac{|f_c - \hat{f}_c|}{\Delta f} \rfloor \quad (16)$$

式中 $\lfloor x \rfloor$ 取整到最近的整数  $\Delta f = c/t$ 。计算结果如表 1~3 所示。

表 1 空矩形波导的截止频率(TM极化)

表 2 部分介质填充矩形波导的截止频率(TM极化)

Tab.1 Mode cutoff frequencies of hollow rectangular waveguide(TM polarization)

Tab.2 Mode cutoff frequencies of partially dielectric-filled rectangular waveguide(TM polarization)

理论值		MPSTD		FDTD <sup>[15]</sup>	
TM <sub>mn</sub> (m,n)	$\hat{f}_c^{[15]}$ (GHz)	$\hat{f}_c$ (GHz)	$e_f$	$\hat{f}_c$ (GHz)	$e_f$
1,1	16.7705	16.7691	0	16.7625	0
1,5	40.3887	40.3989	0	40.3501	1
3,1	45.6207	45.6255	0	45.5626	2
3,3	50.3115	50.318	0	50.2501	2
3,7	69.1466	69.1449	0	69.0376	3
5,3	78.3023	78.3180	0	78.0001	8
5,5	83.8525	83.8665	0	83.5502	8
5,7	91.5492	91.5731	0	90.7127	4
7,1	105.2675	105.3064	1	104.4377	22
7,5	111.4955	111.5464	1	110.7002	21
7,7	117.3936	117.4397	1	116.5503	22
8,4	123.6932	123.6664	1	122.2878	37
7,9	124.8249	124.9064	2	124.0128	22
9,1	135.2082	135.3063	3	134.1753	28
9,7	144.8491	144.9596	3	144.1753	45
9,9	150.9346	151.0663	4	149.2503	45

理论值 $f_c^{[15]}$ (GHz)	MPSTD		FDTD <sup>[15]</sup>	
	$\hat{f}_c$ (GHz)	$e_f$	$\hat{f}_c$ (GHz)	$e_f$
16.0218	16.0306	0	17.4862	10
19.7099	19.7465	1	19.2477	3
21.6386	21.6588	0	24.4587	19
24.7317	24.7756	1	26.8073	14
28.6893	28.7260	1	30.9174	15

MPSTD 和 FDTD 的计算参数同表 1

表 3 遮蔽微带线的截止频率(TM极化)

Tab.3 Mode cutoff frequencies of shielded microstrip line (TM polarization)

HFSS $f_c^{[15]}$ (GHz)	MPSTD	
	$\hat{f}_c$ (GHz)	$e_f$
16.8977	16.9629	1
22.7337	22.8597	2
23.5520	23.4180	2
27.6291	27.4461	3
29.3668	29.5118	2

MPSTD :t = 6ps Δf = 0.05GHz

MPSTD :t = 8ps Δf = 0.0375GHz ;

FDTD :N<sub>x</sub> = 51 ;N<sub>y</sub> = 101 ,Δf 参数同 MPSTD

针对三种波导结构,表 1~3 的计算结果表明:MPSTD 算法相对于 FDTD 算法取较少的网格数可达到较高的计算精度,可高效、准确地计算波导的截止频率。

### 3.2 弯波导的 S 参数提取

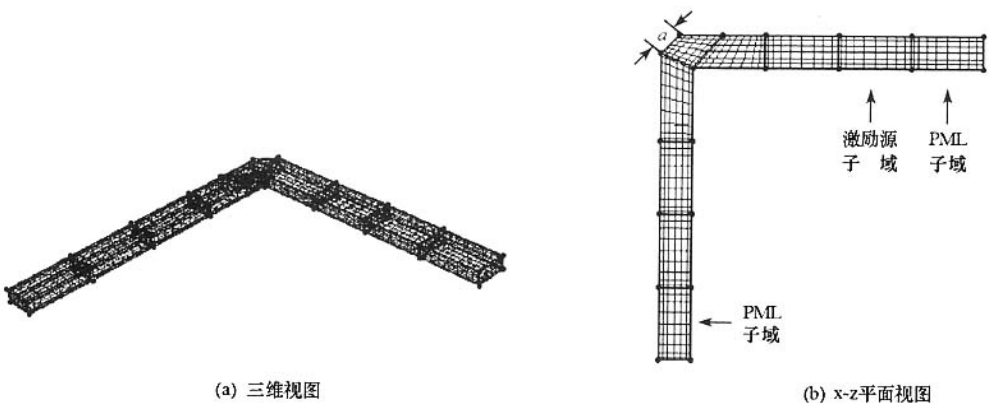


图 6 3cm 波导弯头的子域部分

Fig.6 Subdomains decomposition of the waveguide bend

3cm 弯波导在波导缝隙天线阵的馈电网络中是常用波导组件,其性能对整个天线阵的性能有着非常重要的作用。目前,该组件的性能常被采用 FDTD 来分析,但是由于 FDTD 算法不能很好地处理曲面

边界,使得在曲面边界处必须采用密度很高的细化网格才能达到较好的计算精度。本文采用 MPSTD 算法,通过共形该组件的外形来达到准确、快速分析其性能的目的。拐角斜边长为  $a$  的  $3\text{cm}$  波导弯头的多域剖分及其 Chebyshev 网格分布如图 6 所示。激励源所在子域横截面(非传播方向)网格数为  $8 \times 8$ ,传播方向长度为  $0.2\text{m}$ ,网格数为 30,其余每个子域横截面(非传播方向)网格数为  $8 \times 8$ ,传播方向长度为  $0.05\text{m}$ ,网格数为 8,整个计算中网格数目为 6016,平均每最小波长 6 个网格。激励源采用中心频率为  $f_0$  的调制 Gaussian 脉冲激励,  $f_0 = 10\text{GHz}$ 。为了验证 MPSTD 结果的准确性,与 FDTD 结果进行了比较, FDTD 算法采用不均匀网格剖分,由于 FDTD 的计算方法为整体域计算,计算域需要整体剖分,计算网格数为  $70 \times 70 \times 15 = 73\,500$ 。在此网格剖分条件下,可较好地模拟弯头的斜边,平均每最小波长为 20 个网格。两种方法提取  $S$  参数的结果如图 7 所示。

$S_{11}$  为最小时,相应的 MPSTD 与 FDTD 计算结果如下:

当  $a = 21.72\text{mm}$  时,MPSTD:  $f = 9.23\text{GHz}$ ,  $S_{11} = -50.7\text{dB}$ ;

FDTD:  $f = 9.26\text{GHz}$ ,  $S_{11} = -48.1\text{dB}$ 。

当  $a = 21.02\text{mm}$  时,MPSTD:  $f = 9.87\text{GHz}$ ,  $S_{11} = -62.86\text{dB}$ ;

FDTD:  $f = 9.92\text{GHz}$ ,  $S_{11} = -70.72\text{dB}$ 。

由图 7 可知,MPSTD 计算结果与 FDTD 计算结果基本吻合,在驻波处,MPSTD 计算结果相应于 FDTD 计算结果频率小  $30 \sim 50\text{MHz}$ 。

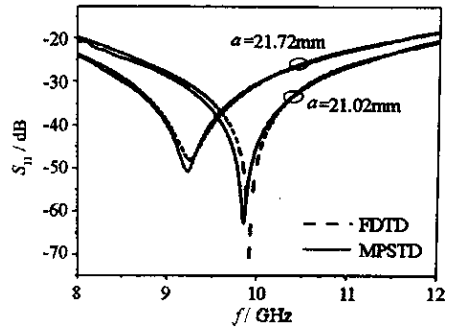


图 7 弯波导  $S$  参数的计算结果

Fig. 7 The  $S$ -parameter of the waveguide bend

## 4 结论

研究了 MPSTD 算法应用于波导问题分析时激励源的设置问题,采用 MPSTD 算法计算了三种类型波导的截止频率和一种典型弯波导的  $S$  参数,计算结果与 HFSS 或 FDTD 的计算结果做了比较,数值仿真表明,将 MPSTD 算法应用于波导问题的分析,可实现对波导问题的精确建模,具有较高的计算效率和计算精度,波导问题的 MPSTD 分析拓展了 MPSTD 算法的应用领域,为复杂波导问题(如波导缝隙问题、波导喇叭等问题)的精确求解提供了一种思路。

## 参考文献:

- [1] Yee K S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1966, 14(3): 302-307.
- [2] Liu Q H. The PSTD Algorithm: A Time-domain Method Requiring only Two Cells per Wavelength[J]. Microwave Opt. Technol. Lett., 1997, 15(2): 158-165.
- [3] Liu Q H, Nguyen N. An Accurate Algorithm for Nonuniform Fast Fourier Transforms[J]. IEEE Microwave Guide Wave Lett., 1998, 8(1): 18-20.
- [4] Liu X, Chen Y. TSNU-PSTD Modeling of a Simplified Indoor Wave Propagation for Wireless Network Communications[A]. Proceedings IEEE Southeast Conference[C], 2002.
- [5] Yang B, Gottlieb D, Hesthaven J S. Spectral Simulations of Electromagnetic Waves Scattering[J]. J. Comp. Phys., 1997, 134: 216-230.
- [6] Hesthaven J S, Dinesen P G, Lynov J P. Spectral Collocation Time-domain Modeling of Diffractive Optical Elements[J]. J. Comp. Phys., 1999, 155: 287-306.
- [7] Kabakian A V. A Three-dimensional Spectral Collocation Time-domain Solver for Electromagnetic Wave Scattering[J]. AIAA Paper, 1997.
- [8] Fan G X, Liu Q H. Multidomain Pseudospectral Time-domain Simulations of Scattering by Objects Buried in Lossy Media[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2002, 40(6): 2002.
- [9] Zhao G Z, Liu Q H. The 3-D Multidomain Pseudospectral Time-domain Method for Wideband Simulation[J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2003, 13(5): 184-186.
- [10] Zhao G, Liu Q H. The 3-D Multidomain Pseudospectral Time-domain Algorithm for Inhomogenous Conductive Media[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 2004, 52(3): 742-749.
- [11] Yang B, Hesthaven J S. Multidomain Pseudospectral Computation of Maxwell's Equation in 3-D General Curvilinear Coordinates[J]. Appl. Numer. Math., 2000, 33: 281-289.
- [12] 姜永金,柴舜连,毛钧杰. MPSTD 算法子域分界面匹配条件的比较研究[J]. 电波科学学报(录用待刊).
- [13] 姜永金,毛钧杰. CFS-PML 边界条件在 PSTD 算法中的实现与性能分析[J]. 微波学报, 2004, 20(4): 36-39.
- [14] 尹家贤,刘克成,刘培国,等. FDTD 中波导激励源研究[J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(2): 99-102.
- [15] Shao Z, Wei G W, Zhao S. DSC Time-domain Solution of Maxwell's Equations[J]. Journal of Computational Physics., 2003, 189: 427-453.



