

# 预处理方法在全速度流场数值模拟中的应用\*

潘 沙,李 桦,廖守亿,范晓樯

(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

**摘 要** :基于预处理方法,采用有限差分方法,LU-SGS 隐式求解了二维可压 Navier-Stokes 方程,数值模拟了无粘突包、粘性空腔、化学非平衡流场,并与试验结果进行了对比。计算结果表明,所采用的数值模拟方法能够求解低速及亚、跨、超全速度流场和化学非平衡流场,所采用的预处理方法在亚声速范围内保持数值精度的前提下,加速了收敛。

**关键词** :预处理方法;全速度;化学非平衡;数值模拟

**中图分类号** :V434 **文献标识码** :A

## Preconditioned Methods for Two-dimensional Numerical Simulation at All Speeds

PAN Sha, LI Hua, LIAO Shou-yi, FAN Xiao-qiang

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** :All speeds control equations were deduced from traditional compressible equations with precondition method and applied to 2D inviscid/viscous flows at all speeds. Jameson central difference scheme, LU-SGS implicit iterative method and round-off control were used to accelerate convergence rates and improve numerical precision. Computations were carried out in the bump flow in a channel, viscous cavity flow and chemical non-equilibrium flow. Numerical results were compared with standard cases. The methods and programs proved to be precise and credible. All these will serve as foundations for further study of integrated flow in combustor and nozzle.

**Key words** :precondition method; all speeds; chemical non-equilibrium; numerical simulations

随着计算流体力学(CFD)的不断发展,解初边值问题的时间推进法—时间相关法已经形成了较为成熟的理论,被广泛地应用于亚、跨、超、高超声速计算中,但是在低马赫数流动时,因为“刚性”问题而效率降低甚至无法求解。其原因在于,当流动速度较低( $M_a < 0.3$ )时,流体被认为是不可压的,条件数

$K(A) = \frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}}$  增大,由于稳定性的限制,显式时间步长反比于最大特征值,从而使方程收敛速度减慢。

近些年较多应用和发展的预处理方法(precondition)可以较好地解决低马赫数时的刚性问题。它通过对原方程时间导数项乘以一个预处理矩阵,改变了方程的特征值,使所有的特征值都具有相同的量级,从而解决低马赫数时的刚性问题<sup>[1]</sup>。这种方法能够有效地利用传统的求解可压缩流的理论和方法,各个方程全部耦合求解,便于计算全速度流场,具有很好的发展前景。

在燃烧室、喷管一体化的计算中,流场是明显的化学非平衡状态,在燃烧室内是低速流动燃烧状态,高温高压的燃气在喷管中加速到超声速,因此有必要对其进行全速度流场的数值模拟。正是基于以上考虑,本文采用预处理方法求解化学非平衡、全速度流场。

### 1 控制方程

#### 1.1 原化学非平衡 NS 方程

二维直角坐标系下守恒型化学非平衡方程为:

\* 收稿日期:2005-12-30  
基金项目:航天支撑技术基金项目  
作者简介:潘沙(1976—),男,博士生。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\alpha(E - E_v)}{\partial x} + \frac{\alpha(F - F_v)}{\partial y} = S \quad (1)$$

式中,  $Q$  为守恒变量,  $E$ 、 $F$ 、 $E_v$ 、 $F_v$  分别为  $x$ 、 $y$  方向的无粘/粘性通量,  $S$  为化学反应源项, 具体形式参见文献[2]。

## 1.2 化学非平衡全速度流场控制方程

可压缩 NS 方程在求解低速流场时会带来一系列的困难, 一是压强为  $\frac{1}{M_{a\infty}^2}$  的量级, 而对流项为 1 的量级, 从而带来较大的截断误差[3]; 二是由于条件数太大而引起的刚性问题。为克服上述问题, 需对求解的变量形式进行变化, 并对控制方程进行处理。

(1) 考虑到在动量方程中是压强梯度而非压强在起耦合作用, 因此将压强写成  $p = p_0 + p_g$ , 一般选取  $p_0$  为来流静压, 而  $\nabla(p_0 + p_g) = \nabla p_g$ , 在动量方程中将  $p$  用  $p_g$  代替, 从而在马赫数趋于零时, 压强的量级保持一致, 消除了截断误差[4]。

(2) 对原控制方程进行预处理, 使方程的特征值处于同一量级, 消除刚性问题。

一般曲线坐标系下二维化学非平衡全速度流场控制方程式为:

$$\Gamma \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau} + \frac{\alpha(\tilde{E} - \tilde{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\alpha(\tilde{F} - \tilde{F}_v)}{\partial \eta} = \tilde{S} \quad (2)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho Y_1 \\ \vdots \\ \rho Y_{ns-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p_g \\ u \\ v \\ h \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{ns-1} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1/\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u/\beta & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v/\beta & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{H}{\beta} - 1 & \rho u & \rho v & \rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Y_1/\beta & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & \dots & 0 \\ Y_2/\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ Y_{ns-1}/\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \rho \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_1 \\ \vdots \\ \dot{\omega}_{ns-1} \end{bmatrix}$$

式中,  $p_g = p - p_0$ , 一般取  $p_0$  为来流压强,  $u$ 、 $v$ 、 $h$ 、 $Y_1$ 、 $\dots$ 、 $Y_{ns-1}$  分别为  $x$ 、 $y$  向速度、焓、各组份质量比数,  $\dot{\omega}_i$  为  $i$  组份的质量生成率,  $J$  为坐标变换雅可比矩阵,  $\tilde{E}$ 、 $\tilde{E}_v$ 、 $\tilde{F}$ 、 $\tilde{F}_v$ 、 $\tilde{S}$  具体形式见文献[3],  $\Gamma$  为预处理矩阵, 取  $\beta = u^2 + v^2$ 。

## 2 差分格式及数值方法

### 2.1 差分格式

由于低马赫数时流场实际上是不可压流场, 此时某一点的影响区域为全场, 而中心差分格式可较好地反映这一特点, 因此本文采用 Jameson 等人的 JST 中心差分格式。为保证精度和数值计算的稳定性, 添加了人工粘性, 并在运用于预处理方程时作了修正[5]。以  $\xi$  方向为例, 无粘数值通量为:

$$\tilde{E}_{i+1/2,j} = (\tilde{E}_{i,j} + \tilde{E}_{i+1,j})/2 - D_{i+1/2,j}$$

其中,  $D_{i+1/2,j} = \Gamma_{i+1/2,j} \lambda_{i+1/2,j} [ \epsilon_{i+1/2,j}^{(2)} (\tilde{W}_{i+1,j} - \tilde{W}_{i,j}) - \epsilon_{i+1/2,j}^{(4)} (\tilde{W}_{i+2,j} - 3\tilde{W}_{i+1,j} + 3\tilde{W}_{i,j} - \tilde{W}_{i-1,j}) ]$

### 2.2 数值方法

为了将 LU-SGS 数值方法应用于预处理方程的求解, 需对雅可比矩阵的分裂进行适当改变, 以使预处理矩阵参与分裂[5], 以  $A$  矩阵为例:

$$A = \Gamma \Gamma^{-1} A = \Gamma \tilde{A}, \quad \tilde{A} = \Gamma^{-1} A$$

$$\tilde{A} = \tilde{A}^+ + \tilde{A}^-, \quad \tilde{A}^\pm = \frac{1}{2} [ \tilde{A} \pm \rho(\tilde{A}) I ], \quad (\rho(\tilde{A})) = \omega \cdot \max(\lambda_A), \quad \omega \text{ 为松弛因子, } \omega \geq 1$$

$$\tilde{A}^\pm = \Gamma \tilde{A}^\pm = \Gamma \frac{1}{2} [ \tilde{A} \pm \rho(\tilde{A}) I ] = \frac{1}{2} [ A \pm \rho(\tilde{A}) \Gamma ]$$

$A$ 、 $B$  的分裂完成后, 离散方程可写为:

$$\left\{ \frac{I}{\Delta t} + [\rho(\tilde{A}) + \rho(\tilde{B})]I - T \right\} \delta W_{i,j} + \Gamma^{-1} \{ A_{i+1,j}^- \delta W_{i+1,j} - A_{i-1,j}^+ \delta W_{i-1,j} + B_{i,j+1}^- \delta W_{i,j+1} - B_{i,j-1}^+ \delta W_{i,j-1} \}$$

$$= -\Gamma^{-1} R^n$$

$$\begin{cases} L = -\Gamma^{-1}(A_{i-1,j}^+ + B_{i,j-1}^+) \\ D = \frac{I}{\Delta t} + [\rho(\tilde{A}) + \rho(\tilde{B})]I - T \\ U = \Gamma^{-1}(A_{i+1,j}^- + B_{i,j+1}^-) \end{cases}$$

求解时分三步进行：

- (1)  $(L + D)\delta W^* = -R^n$
- (2)  $(D + U)\delta \bar{W} = D\delta W^*$
- (3)  $W^{n+1} = W^n + \delta \bar{W}$

### 3 计算结果及分析

#### 3.1 条件数的比较

预处理矩阵构造和选取的原则复杂,有专门的文献<sup>[6]</sup>论述,本文不作详细讨论。仅针对本文引用的预处理矩阵和预处理后的方程进行分析。作为衡量矩阵刚性程度的条件数  $K(A)$ ,定义为最大特征值与最小特征值之比,  $K(A) = \frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}}$ 。

以  $\xi$  方向为例,对于原 NS 方程特征值为:  $\lambda = U, \dots, U + a, U - a$ ; 对于采用本文预处理矩阵的全速度方程:  $\lambda = U, \dots, \frac{1}{2}[U$

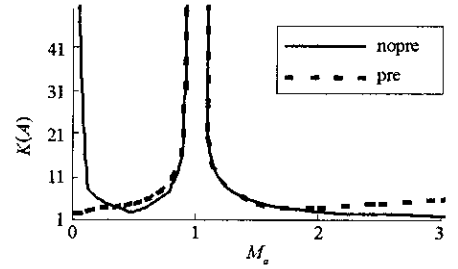


图 1 条件数刚性对比

Fig.1 Comparison between condition numbers

$(1 + \frac{\beta}{a^2}) \pm \sqrt{U^2(1 - \frac{\beta}{a^2})^2 + 4\beta(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}]$ , 其中  $U = \alpha_1 u + \alpha_2 v$ ,  $\alpha_1 = \xi_x, \alpha_2 = \xi_y$ 。为了比较方便,设  $\xi_x = 1, \xi_y = 0$ , 则又变为直角坐标系。随着马赫数的变化,条件数中的最大、最小特征值也不同,由此可定性地得出图 1。可以看出,原方程在马赫数趋近于 0 和 1 时,条件数迅速趋向于无穷大,从而出现刚性问题;通过预处理后,虽然在跨声速附近的状况没有改变,但随着马赫数的降低,条件数趋近于 1,从而保证特征值处于同一量级,加速了收敛,克服了刚性问题,这一点通过后面的无粘突包数值试验得到验证。

#### 3.2 无粘突包算例

下壁有突包的无粘管道流动,几何外形简单,便于数值解的分析。本文采用文献<sup>[7]</sup>中的算例,管长为 3,从 -1 到 +2,高为 1,突包尺寸为  $y = 0.1 \sin^2 \pi x (0 < x < 1)$ 。为了检验预处理后加速收敛的效果,对低亚声速及亚声速(图 2(a)),跨声速(图 2(b)),超声速(图 2(c))收敛史进行了比较。在低亚声速和亚声速流动中,  $Ma < 0.2$  时流体已呈现为不可压,用原方程求解,出现明显的数值振荡,根本不能保证求解精度;预处理后,收敛速度明显优于原方程,收敛精度也明显增加,而且随着马赫数的不断降低,预处理后方程的条件数趋近于 1,收敛速度和精度也变得对马赫数不再“敏感”,基本上保持不变,表现为  $Ma < 0.2$  的收敛史曲线基本上一致,这也与图 1 中马赫数小于 0.5 的趋势相符合。在跨声速的计算中,此时预处理后的条件数与原方程相比基本一致,从而在收敛速度与精度上也与原方程差别不大。在超声速的计算中,预处理后方程的条件数大于未作预处理的,收敛不再占有优势,所用的迭代步数也多于未作预处理的,收敛精度也相应降低。这表明,用预处理的方法能够求解超声速和高超声速,但失去了加速收敛的优势。通过本算例也证明了预处理方法能够求解低亚声速及亚、跨、超声速流场,在低马赫数下确实起到了加速收敛的作用。

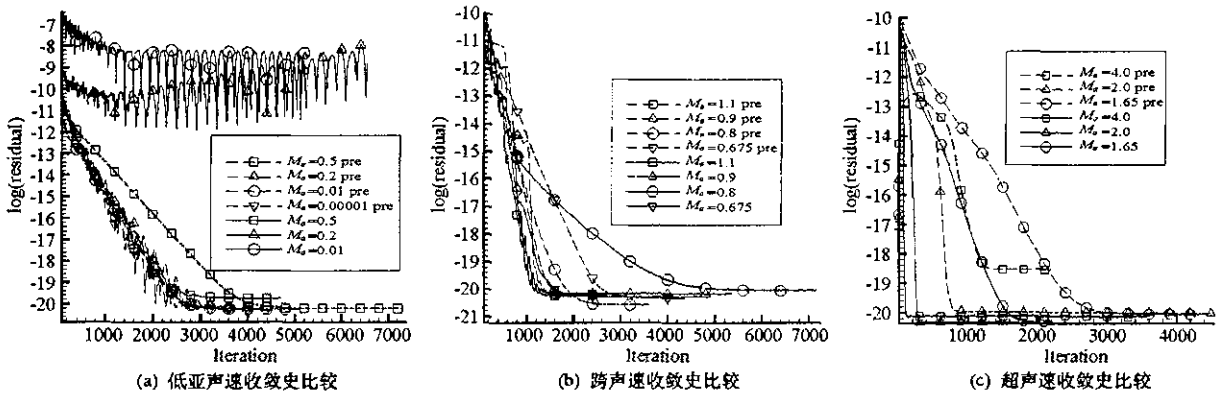


图2 不同马赫数下预处理前后收敛史比较

Fig.2 Convergence rates of with and without precondition at different Machs

### 3.3 粘性驱动空腔算例

长期以来,粘性空腔流动都作为检验不可压算法的标准算例。本文采用了文献[5]中的算例,并与试验结果进行了对比。空腔长、宽均为1,顶盖速度为1,其余三个壁面固定不动,对比所用的马赫数为0.001,数值计算了不同来流及不同雷诺数条件下的流场。图3、图4与Ghia et al的雷诺数分别为100和400的结果进了对比,中心线上的速度符合较好。图5列出了雷诺数分别为100、400、1000、5000时的流线图。可以看出,在空腔中央产生了一个原始涡,随着雷诺数的增大,涡中心向空腔几何中心移动,在底部两个角落各产生一个二次涡;随着雷诺数的继续增大,左上角也产生一个二次涡;雷诺数再增大( $Re > 5000$ ),在二次涡附近又产生更小的涡,此时流场已呈现非定常状态。计算中还发现随着雷诺数的增大,收敛速度降低。这与文献[1]相一致,分析认为是雷诺数增大、物理粘性减小的原因。

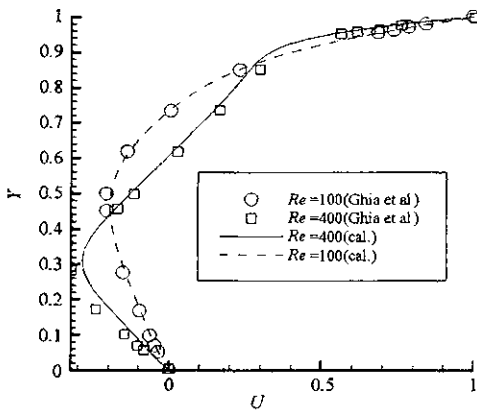


图3 垂直中心线上的U分布

Fig.3 The U velocity component at vertical centerline

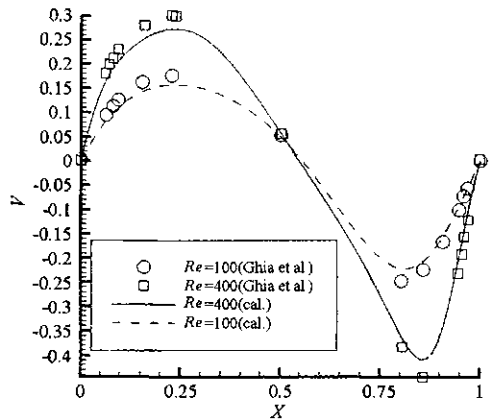


图4 水平中心线上的V分布

Fig.4 The V velocity component at horizontal centerline

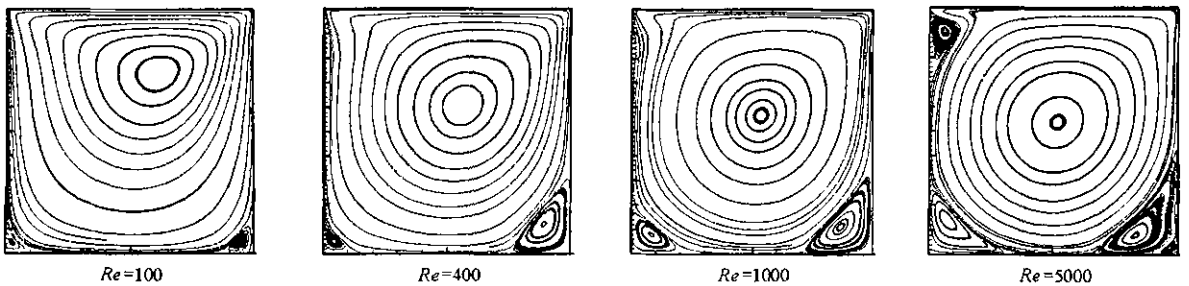


图5 不同雷诺数下的流线图

Fig.5 Streamline contours at different Re

### 3.4 化学反应剪切层

为了下一步工程实际的需要,同时进一步检验预处理方法,将预处理与化学非平衡相结合,计算了文献[8]带有化学反应的自由剪切层。化学非平衡方程中的细节描述篇幅所限在此从略。有限速率方程采用的是文献[9]中的氢气与空气反应的七组分八反应方程。计算条件见表1。上层燃料和下层氧化剂平行剪切流动,在中间点火塞的作用下发生化学反应,并随流动向下游发展,产生了O、OH、H、H<sub>2</sub>O等组分。图6列出了在X方向

表1 化学反应剪切层计算条件

Tab.1 Simulation conditions for reacting shear

	氧化剂	点火塞	燃料
Y向(mm)	-80~0	0~1	1~80
T(K)	811	1250	367
U(m/s)	390	140	140
P(N/m <sup>2</sup> )	100 000	100 000	100 000
Y <sub>O<sub>2</sub></sub>	0.21	0.21	0.0
Y <sub>H<sub>2</sub></sub>	0.0	0.013	0.0394
Y <sub>N<sub>2</sub></sub>	0.79	0.777	0.9606

2.5mm、7.5mm、10mm、15mm、30mm剖面的速度,图7给出了OH和H<sub>2</sub>O组分的等值线。上游反应区域较小,速度梯度大,变化剧烈。随着向下游流动方向的延伸,反应区域变大,速度梯度减小。与试验结果对比,可以看出在上游与试验符合较好,下游出现一定的偏差,这种问题与文献[8]一致,分析认为是与物理现象本身的不稳定有关,而与预处理方法无关。通过本算例也表明预处理可用于化学非平衡的计算。

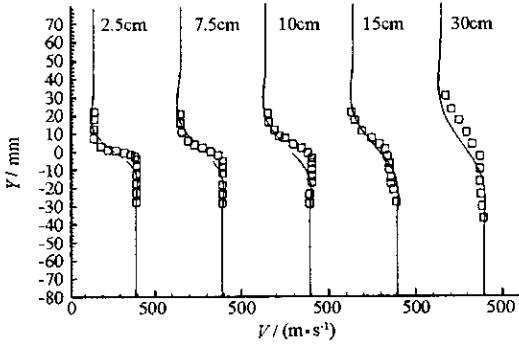


图6 剖面速度面  
Fig.6 Velocity profiles

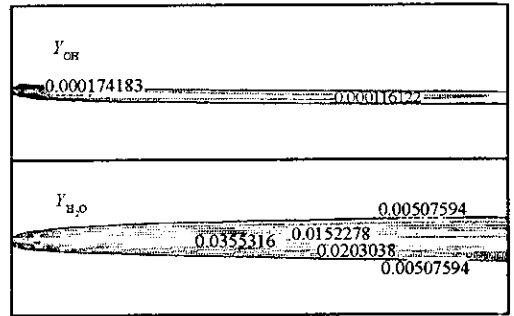


图7 组分等值线图  
Fig.7 Contours of species mass fractions

## 4 结论

(1)基于预处理方法,发展了求解全速度、化学非平衡流场的数值模拟方法。

(2)通过条件数比较,理论分析了方程预处理后的刚性问题,并通过算例验证,证明本文所采用的预处理矩阵在低速和亚声速范围内,可以很好地加速收敛,提高精度,在跨声速和超声速则优势减小。

(3)预处理仍可应用于化学非平衡的计算,可延伸至下一步燃烧室、喷管等工程实际计算中。

## 参考文献:

[1] 廖守亿. 预处理方法研究与应用及大气扩散的数值模拟[D]. 长沙:国防科技大学学位论文, 2000.  
 [2] 欧阳水吾, 谢中强, 等. 高温非平衡空气绕流[M]. 北京:国防工业出版社, 2001.  
 [3] Shuen J S, Chen K H, Choi Y H. A Couple Implicit Method for Chemical Non-equilibrium Flow at All Speeds[J]. J. Comput. Phys., 1993, 106: 306-318.  
 [4] Choi Y H, Merkle C L. The Application of Precondition in Viscous Flows[J]. Journal of Computational Physics, 105, 1993.  
 [5] Lyle D D, Richard H. Pletcher Evaluation of Multigrid Acceleration for Preconditioned Time-accurate Navier-Stokes Algorithms[R]. AIAA95-1668-CP, 1995.  
 [6] Turkel E. Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1999, 31: 385-416.  
 [7] Karimian L, Schneider M. Pressure-based Control-volume Finite Element Method for Flow at All Speeds[J]. AIAA Journal, 1995, 33(9).  
 [8] Edwards J R, Christopher J. Roy Preconditioned Multigrid Methods for Two-dimensional Combustion Calculations at All speed[J]. AIAA Journal, 1998, 36(2).  
 [9] Evans J S, Schexnayder Jr C J. Influence of Chemical Kinetics and Unmixedness on Burning in Supersonic Hydrogen Flames[J]. AIAA Journal, 1980, 18(2): 188-193.



