国 防 科 技 大 学 学 报
第 28 卷第 3 期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol. 28 No. 3 2006

文章编号: 1001- 2486(2006)03- 0059- 05

求解传感器网络最大生存时间的最大流算法*

潘晏涛, 彭 伟, 卢锡城
(国防科技大学 计算机学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 节能是传感器网络研究的中心问题之一, 目的是延长网络的生存时间。因此对于一个给定网络, 很自然地关心它的最大生存时间是多少。从网络最大流的角度分析这个问题, 给出了求解传感器网络最大生存时间确切值的算法。

关键词: 传感器网络; 最大生存时间; 最大流
中图分类号: TP393.4 文献标识码: A

Maximum Flow Based Model and Method of the Maximum Lifetime Problem of Sensor Networks

PAN Yan-tao, PENG Wei, LU Xi-cheng
(College of Computer, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Maximizing the collective functional lifetime is clearly one of the biggest design objectives of any wireless sensor network. For this purpose, it is important to find out the value of maximum lifetime of a sensor network exactly. In this paper, the lifetime maximization was formalized for the multi-source multi-sink maximum flow problem of a directed graph with arc and vertex capacity powers. Then a method was proposed to solve this kind of maximum flow problem.

Key words: sensor networks; maximum lifetime; maximum flow

无线传感器网络是由微小的传感器节点借助无线通信以自组织的方式构成的数据采集网络。由于能源受限, 节能成为传感器网络研究的一个中心问题。节能的目的是延长网络的生存时间。所谓生存时间一般是指从网络开始工作到出现第一个能量耗尽的节点为止的时间长度。

目前关于最大生存时间的研究主要有以下一些。文献[1]给出了生存时间的上界。随后的文献[2]在文献[1]的基础上引入数据融合并通过优化路由节点和融合节点的角色分配给出生存时间的上界。文献[3]提出了一个基于节点密度概率分布而非节点确切位置的模型框架, 给出了生存时间的期望值。文献[4]对每个节点上数据产生的过程进行了模型化, 给出了关于生存时间的数学分析。上述研究给出的是最大生存时间的上界或者期望值。另一类研究是以生存时间最大化为目标的路由研究。文献[5-6]首次给出基于线性规划的生存时间模型和求解的启发式算法。同一作者随后在文献[7]中给出了一个基于 Garg-Koenemann 方法的集中式近似算法。文献[8]在线性规划模型上提出了另一个启发式算法, 但在网络规模较大的时候扩展性不佳[9]。文献[10]在多物流线性规划模型上提出一个启发式算法, 不同于其它工作的地方是算法的近似程度有所保障。在较近的文献[11]中, 作者在线性规划模型上提出一个基于树的快速算法以减少运行时间并提高可扩展性。文献[5-11]都使用线性规划来形式化生存时间最大化问题并提出了一系列启发式算法以求得近似解。

总的看来, 对生存时间的研究根据是否考虑数据融合, 是否考虑功率控制, 可以粗分为 4 类。其中带有功率控制不考虑数据融合的一类问题曾被认为是 NP 难的, 后来由于线性规划被成功地用来描述此类问题, 被证明在理论上是 P 问题。但是到目前为止, 仍然没有找到很好的多项式时间复杂度的方法来求解精确值。为此, 我们试图从最大流的角度对该问题进行研究。作为阶段性结果, 在本文中给出不

* 收稿日期: 2005-12-01
基金项目: 国家重点基础研究发展规划 973 资助项目(2003CB314802); 国家自然科学基金资助项目(90104001, 90204005, 90412011)
作者简介: 潘晏涛(1977—), 男, 博士生。

带功率控制的生存时间最大化问题的抽象模型和求解方法。首先给出问题的数学描述以及最大生存时间、最优传输方案等概念的确切定义;然后通过使用虚顶点将该问题抽象为点弧权网络上单源单汇的最大流问题;最后给出求解方法。

1 问题的抽象

考虑一个传感器网络。V 为节点集合;A 为链路集合;$w(v)$为节点 v 上感知数据的产生速度;节点可用于数据传输的总能量限制为 $p(v)$(考虑到数据发送的功耗远远超过接收功耗,假设 $p(v)$只用于数据发送)。所有节点都使用全向天线以相同功率覆盖一个圆形的通信范围。不失一般性,令单位数据传输耗能为 1。不考虑数据融合。将传感器网络的节点作为图的顶点,将节点间的链路作为弧,将每个节点的初始能量作为顶点上的权 $p(v)$,传感器网络可以抽象为点权有向传输网络。

定义 1 $N^s=(V,A,p,X,Y)$称为一个传感器传输网络(以下简称传感器网络),如果(1) $G(V,A)$是一个简单有向图,V 为顶点集,A 为弧集;(2)$p(v): V\mapsto \overline{R^-}$ 是 V 上的能量函数,对 $\forall v\in V$, $p(v)$称为顶点 v 的剩余能量;(3)X, Y是 V 中互不相交的两个子集,称为源集和汇集;$I=V\setminus(X\cup Y)$为中间点集。

在定义 1 的基础上,可以定义传感器网络上的最大流和最大生存时间。传感器网络中的流$f(a): A\mapsto \overline{R^-}$ 除了要满足流的守恒条件还要满足能量约束,即顶点上出口流量的总能耗不超过总能量。对于$H\subseteq V$,引入记号$N^+(H) ¦ \{(v,u)\mid(v,u)\in A, v\in H, u\in V\setminus H\}$,$N^-(H) ¦ \{(u,v)\mid(u,v)\in A, v\in H, u\in V\setminus H\}$。对于$f$,引入记号$f^+(H) ¦ \sum_{a\in N^+(H)} f(a)$和$f^-(H) ¦ \sum_{a\in N^-(H)} f(a)$。传感器网络的生存时间是网络工作直至分割时为止的时间长度。同一个网络采用不同的传输方案有不同的生存时间。将传输方案抽象为流,它应满足$f^+(x)-f^-(x)=T\cdot w(x)$, $\forall x\in X$。当 $\exists u\in V$ 使得$p(u)-\sum_{a\in N^+(u)} f(a)=0$时,网络发生分割,这时称$f$ 为N^s 的一个传输方案,T 为N^s 在方案f 下的生存时间。相应地,可以定义最佳传输方案和最大生存时间。

定义 2 设$N^s=(V,A,p,X,Y)$为传感器网络。$f(a): A\mapsto\overline{R^-}$ 称为N^s 上的流,如果$\sum_{a\in N^+(v)} f(a)\leqslant p(v)$, $\forall v\in V$ 且$f^+(v)=f^-(v)$, $v\in I$。记$val(f) ¦ f^+(X)-f^-(X)$为流f 的值。如果存在f 使得$f^+(x)-f^-(x)=T\cdot w(x)$, $\forall x\in X$ 且$p(u)-\sum_{a\in N^+(u)} f(a)=0$, $\exists u\in V$,则称f 为N^s 的一个传输方案,T 为N^s 在方案f 下的生存时间。如果不存在f' 及其对应的T',使得$T'>T$,则称f 为最佳传输方案,T 为最大生存时间,记为 T^*。

下面,先给出N^s 的变形网络的定义,然后建立N^s 的最大生存时间和它的变形网络的最大流之间的关系。

定义 3 设$N^s=(V,A,p,X,Y)$为传感器网络,$T>0$,则$N_T^s=(V',A',c,p',s,t)$称为N^s 关于T 的变形网络,如果(1) $V'=V\cup\{s,t\}$;(2)$A'=A\cup A_s\cup A_t$,其中$A_s=\{(s,x)\mid x\in X\}$, $A_t=\{(y,t)\mid y\in Y\}$;(3) $c(u,v)=\begin{cases}T\cdot w(v), & u=s\\ \infty, & \text{其它}\end{cases}$;(4)$p'(v)=\begin{cases}p(v), & v\in V\setminus Y\\ \infty, & \text{其它}\end{cases}$。

$f(a): A\mapsto\overline{R^-}$ 称为N_T^s 上的流,如果$\sum_{a\in N^+(v)} f(a)\leqslant p(v)$, $\forall v\in V'$ 且$0\leqslant f(a)\leqslant c(a)$, $\forall a\in A'$ 且$f^+(v)=f^-(v)$, $v\in V'\setminus\{s,t\}$。

引理 1 设N^s 为传感器网络,其最大生存时间为 T^*, $T>0$, N_T^s 为N^s 关于T 的变形网络,$f_{\max}^{s,T}$ 为N_T^s 的最大流,则 $T\leqslant T^*$ 的充要条件是$val(f_{\max}^{s,T})=\sum_{x\in X} T\cdot w(x)$。

证明 必要性:由于 $T\leqslant T^*$,所以存在 N^s 的流f 使得$f^+(x)-f^-(x)=T\cdot w(x)$, $\forall x\in X$。构造$f'(u,v)=\begin{cases}T\cdot w(v), & (u,v)\in A_s\\ f^-(u)-f^+(u), & (u,v)\in A_t\\ f(u,v), & \text{其它}\end{cases}$。容易验证$f'$ 为N_T^s 的流,且$val(f')=\sum_{x\in X} T\cdot w(x)$。另

一方面, $(\{s\}, V'\setminus\{s\})$ 为 N_T^s 的割, 且容量不超过 $\sum_{x\in X} T\cdot w(x)$, 因此对 N_T^s 的任意流 $f^{s,T}$ 有 $val(f^{s,T}) \leqslant \sum_{x\in X} T\cdot w(x) = val(f')$。所以 f' 为 N_T^s 的最大流且 $val(f_{\max}^{s,T}) = val(f') = \sum_{x\in X} T\cdot w(x)$。

充分性: 采用反证法, 假设 $T > T^*$。构造 $f(a) = f_{\max}^{s,T}(a)$, $\forall a\in A$, 容易验证 f 是 N^s 的流, 且 $val(f) = val(f_{\max}^{s,T}) = \sum_{x\in X} T\cdot w(x) > \sum_{x\in X} T^*\cdot w(x)$。根据定义 N^s 的最大生存时间不小于 T。这与 T^* 为最大生存时间的已知相矛盾。

根据引理 1, 我们有以下定理。

定理 1 设 $N^s = (V, A, p, X, Y)$ 为传感器网络, $T > 0$, N_T^s 为 N^s 关于 T 的变形网络, $f_{\max}^{s,T}$ 为 N_T^s 的最大流, 则 N^s 的最大生存时间 T^* 为满足 $val(f_{\max}^{s,T}) = \sum_{x\in X} T\cdot w(x)$ 的最大 T。(证明略)

进一步, 令 $\theta(T) = \begin{cases} 1, & val(f_{\max}^{s,T}) = \sum_{x\in X} T\cdot w(x) \\ 0, & val(f_{\max}^{s,T}) < \sum_{x\in X} T\cdot w(x) \end{cases}$, 并定义无穷序列 $\{T_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$, 其中 $T_0 = 0$, T_1 为生存时间上限, 序列的其它项通过以下算法产生。

算法 1 Algorithm-BisectionSearch

第一步: 令 $T_{low} = T_0$, $T_{up} = T_1$, $i = 0$。

第二步: $T_{i+2} = T_{up} - T_{low}/2$; 若 $\theta(T_{i+2}) = 0$, 则令 $T_{up} = T_{i+2}$, 否则令 $T_{low} = T_{i+2}$; 令 $i = i+1$, 转第二步。

由定理 1 可知 $\lim_{i\to+\infty}\{T_i\} = T^*$。因此, 只要求解 $N_T^s = (V', A', c, p', s, t)$ 的最大流, 就可以利用算法 1 求得对应传感器网络的最大生存时间。$N_T^s = (V', A', c, p', s, t)$ 是一个既有点权又有弧权的有向网络, 下面给出求解方法。

2 点弧权网络的最大流

首先给出对点弧权网络的一般定义以及流的定义。

定义 4 称 $N = (V, A, c, p, s, t)$ 是一个带有点权和弧权的传输网络(以下简称网络), 如果 (1) $G(V, A)$ 是一个简单有向图; (2) $c(a): A \mapsto \overline{R^-}$ 称为弧权函数, 对 $\forall a\in A$, $c(a)$ 称为弧 a 的容量, 表示弧上允许通过的最大流量; (3) $p(v): V \mapsto \overline{R^-}$ 称为点权函数, 对 $\forall v\in V$, $p(v)$ 称为顶点 v 的容量, 表示顶点 v 上允许的最大出口流量; (4) s, t 是 V 中互不相同的两个顶点, 称为源和汇; 除了源和汇以外的其它节点称为中间点。

定义 5 $f(a): A \mapsto \overline{R^-}$ 称网络 N 的一个流, 如果: (1) $0 \leqslant f(a) \leqslant c(a)$, $\forall a\in A$; (2) $\sum_{a\in N^+(v)} f(a) \leqslant p(v)$, $\forall v\in V$; (3) $\sum_{a\in N^+(v)} f(a) = \sum_{a\in N^-(v)} f(a)$, $\forall v\in V\setminus\{s, t\}$。在网络中, 可以定义点弧集合 $K = \{k \mid k\in V \vee k\in A\}$ 为割, 并记 $cap(K) = \sum_{k\in K\cap V} p(k) + \sum_{k\in K\cap A} c(k)$ 为 K 的割容量。可以证明在上述定义中, 最大流最小割定理仍然成立。限于篇幅原因, 我们略掉这部分证明。它有两个推论: (1) $val(f) \leqslant cap(K)$; $\forall f, K$; (2) 若 $val(f) = cap(K)$, 则 f 是最大流, K 是最小割。

类似弧权网络, 点弧权网络上也可以定义伴随网络 $N(f) = (V, A^0 = A_+^0 \cup A_-^0, c^0, p^0, s, t)$, 其中 A_+^0, A_-^0 分别为正向弧集和逆向弧集, $p^0(v) = p(v) - f^+(v)$。在 $N(f)$ 上寻找可行路是求解的关键, 它由寻找可行弧的过程组成, 包括两个步骤: (1) 判定从当前顶点出发是否有满足条件的弧; (2) 度量相应弧形成的约束以便计算可行路现有部分的容量。在传统的弧权网络上, 这个过程比较简单——从当前顶点出发的所有容量不为0的弧都是满足条件的弧, 新弧形成的约束就是弧上的容量。在点弧权网络中, 可行弧的判定及其约束的度量要复杂一些。一条正向弧上的单位流量要消耗弧尾顶点 1 个单位的能量, 对弧头顶点则没有影响。而一条逆向弧上的单位流量将使弧头顶点上的能量增加 1 个单位, 对弧尾顶点则没有影响。因此判断一条弧是否可行要考虑以下两个因素: (1) 当前顶点上有多少剩余能量;

(2)待判定的弧是正向弧还是逆向弧。根据这两个因素的不同组合, 对弧的可行性判定和约束度量可以分为几种不同的情况。

设当前顶点为 v, 可行路的现有部分在当前顶点的入弧是(u, v), 待判定的出弧是(v, w)。

情况 **1** $(v, w)\in A_-^0$。这时出弧为逆向弧, 在其上增加流量相当于减少当前流 f 在对应的正向弧上的流量, 因此不消耗当前顶点 v 上的能量。这时不需要进一步考虑其它因素, 可以判定出弧可行, 形成的约束为 $c^0(v, w)$。

情况 **2** $(v, w)\in A_+^0$ 且 $(u, v)\in A_+^0$ 且 $p^0(v)>0$。这时出弧为正向弧, 在其上增加流量要消耗当前顶点 v 上的能量。入弧也是正向弧, 其上到来的新增流量对顶点 v 上的能量没有增益。因此必须有 $p^0(v)>0$才能保证出弧(v, w)为可行弧。出弧上形成的约束为 $\min\{p^0(v), c^0(v, w)\}$。

情况 **3** $(v, w)\in A_+^0$ 且 $(u, v)\in A_-^0$。这时出弧为正向弧, 在其上增加流量要消耗当前顶点 v 上的能量。虽然顶点 v 上的能量可能低至 0, 但是入弧为逆向弧, 其上到来的流量会增加顶点 v 上的能量。入弧上到来的单位流量对顶点 v 的能量增益抵消了出弧上单位流量对顶点的能量消耗, 因此出弧可行且出弧上形成的约束为 $c^0(v, w)$。

除上述3 种情况外, 出弧均不是可行弧。根据上述分析, 我们对可行路及其容量定义如下。

定义 **6** 设 f 是网络 $N=(V, A, c, p, s, t)$ 的一个流, $N(f)$ 是 N 关于流 f 的伴随网络, $N(f)$ 的一条 $s-t$ 点弧交错序列 P 称为可行 $s-t$ 路, 如果(1) $c^0(P)>0$, 其中 $c^0(P)\triangleq\min\{c^0(a)\mid a\in P\}$; (2)对于 $\forall v\in P\setminus\{t\}$, (2.1) 若 $v=s$, 则 $p^0(v)>0$; (2.2) 否则对 $(u, v), (v, w)\in P$ 满足以下 3 条中的至少一条: (2.2.1) $(v, w)\in A_-^0$; (2.2.2) $p^0(v)>0$; (2.2.3) $(u, v)\in A_-^0$。令

$$d^0(v, w)=\begin{cases} c^0(v, w), & (v, w)\in A_-^0 \text{ 或 } (u, v)\in A_-^0 \\ \min\{p^0(v), c^0(v, w)\}, & (v, w)\in A_+^0 \text{ 且 } (u, v)\in A_+^0 \text{ 且 } p^0(v)>0 \end{cases}, \quad d^0(s, v)=\min\{p^0(s), c^0(s, v)\},$$

称 $d^0(P)\triangleq\min\limits_{a\in P}\{d^0(a)\}$为路 P 的容量。

定理 **2** f 是网络 N 的最大流的充要条件是在 $N(f)$ 中不存在可行的 $s-t$ 路。

证明 必要性是显然的, 我们给出充分性的简要证明。设 K 是网络 N 的最小割。假设 f 不是网络 N 的最大流, 则 K 在 f 下尚未饱和或者尚未基本饱和。如果 K 未饱和则一定可以找到可行的 $s-t$ 路, 这与已知矛盾。如果 K 已饱和但未基本饱和, 则存在割内的顶点间非零流量。不失一般性, 设割顶点 u, v 之间存在非零流。由于 K 是最小割, 所以对于任意割顶点 u, 在 $N(f)$上一定存在可行的 $s-u$ 路和 $u-t$ 路。而在割顶点 u, v 之间存在逆向弧(v, u)。所以根据定义, 存在可行路 $s-v-u-t$。这与已知矛盾。

3 点弧联合双向调整算法

下面给出点弧联合双向调整算法。

算法 **2** Algorithm-MFACVC2

设 $N=(V, A, c, p, s, t)$ 是一个网络, f 是初始流; T 表示 $N(f)$ 中以 s 为根的有序树; R 为 T 中已经生长完成的顶点集合。T 中每个顶点 v 对应有 2 个标号 $l_1(v)$ 和 $l_2(v)$。设 P 为 T 上唯一的可行 $s-v$ 路, 则令 $l_1(v)=d^0(P)$, $l_2(v)=\begin{cases} +u, & (u, v)\in P\cap A_+^0 \\ -u, & (u, v)\in P\cap A_-^0 \end{cases}$。

第一步: 令 $T=\{s\}$, $l_1(s)=p^0(s)$, $l_2(s)=-1$, $R=\varnothing$。

第二步: 若 $T\setminus R=\varnothing$, 则 f 是最大流。

第三步: 取 $T\setminus R$ 中第一个顶点 u 作为生长顶点。

第四步: 若在 $N(f)$ 中割(T, T)不包含以 u 为起点的弧(u, v)满足以下三个条件中的任意一条: (1) $p^0(u)>0$, (2) $(l_2(u), u)\in A_-^0$, (3) $(u, v)\in A_-^0$, 则令 $R=R\cup\{u\}$并转第二步。

第五步: 取 $(u, v)\in(T, T)$, 令 $T=T\cup\{v\}$、$l_1(v)=\min\{l_1(u), d^0(u, v)\}$、$l_2(v)=$

$$\begin{cases} +u, & (u,v)\in A_{+}^{0} \\ -u, & (u,v)\in A_{-}^{0} \end{cases}。$$

第六步: 若 $v\neq t$, 则转第四步。

第七步: 逆向追踪求出可行 $s-t$ 路 P, 对 $(u,v)\in P$, 令 $f(u,v)=\begin{cases} f(u,v)+l_1(t), & l_2(v)=+u \\ f(u,v)-l_1(t), & l_2(v)=-u \end{cases}$, 重新计算伴随网络 $N(f)$ 并转第一步。

下面分析算法 2 的复杂度。令 n 为顶点数, m 为弧数。引入记号 $\delta_f(u,v)$ 表示伴随网络 $N(f)$ 上顶点 u, v 之间的最小距离, 以间隔的弧数表示。对于算法 2 的每一次可行路调整, 可以证明: 对 $\forall v\in I$, $\delta_f(s,v)$ 单调不减。进一步可以证明算法 2 在至多 $\Theta(n(m+n))$ 步后即因找不到新的可行路而终止。由于篇幅原因, 我们略掉这部分证明。由于算法 2 第三到第七步的基本复杂度为 $\Theta(m)$, 所以算法 2 的总复杂度为 $\Theta(mn(m+n))=\Theta(m^2n)$。该算法的原型是 Edmond-Carp 算法, 如果采用其它复杂度更小的最大流算法作为基础[12-14], 性能可以继续提高。

4 小 结

求解传感器网络生存时间的确切值是一个既有理论意义又有直接应用价值的问题。在以往研究的基础上, 我们以最大流模型抽象生存时间最大化问题, 所得到的模型表达能力较强, 不但可以给出最大生存时间的确切值, 而且算法的复杂性低, 收敛性和收敛速度都有保证。下一步, 准备在考虑节点带有功率控制能力的情况下, 对最大生存时间和最佳传输方案问题从最大流的角度进行建模。

参 考 文 献:

[1] Bhardwaj M, Chandrakasan A, Garnett T. Upper Bounds on the Lifetime of Sensor Networks[A]. In IEEE International Conference on Communications[C], Helsinki, Finland, June 2001.

[2] Bhardwaj M, Chandrakasan A. Bounding the Lifetime of Sensor Networks Via Optimal Role Assignments[A]. In IEEE INFOCOM' [C], 2002.

[3] Duarte-Melo E J, Liu M, Misra A. A Modeling Framework for Computing Lifetime and Information Capacity in Wireless Sensor Networks[A]. In Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks[C], Cambridge, UK, March 2004.

[4] Rai V, Mahapatra R N. Lifetime Modeling of a Sensor Network[A]. In Design, Automation and Test in Europe[C], Munich, Germany, March 2005.

[5] Chang J H, Tassiulas L. Routing for Maximum System Lifetime in Wireless Ad-hoc Networks[A]. In 37th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing[C], Monticello, IL, September 1999.

[6] Chang J H, Tassiulas L. Energy Conserving Routing in Wireless Ad-hoc Networks[A]. In IEEE INFOCOM' 2000[C], 2000.

[7] Chang J H, Tassiulas L. Fast Approximation Algorithms for Maximum Lifetime Routing in Wireless Ad-hoc Networks[A]. In Lecture Notes in Computer Science: Networking[C], 2000, 1815.

[8] Dasgupta K, Kalpakis K, Namjoshi P. Efficient Algorithms for Maximum Lifetime Data Gathering and Aggregation in Wireless Sensor Networks[J]. Computer Networks, 2003, 42.

[9] Madan R, Lall S. Distributed Algorithms for Maximum Lifetime Routing in Wireless Sensor Networks[A]. In Global Telecommunications Conference [C], IEEE, 2004, 2.

[10] Sankar, Liu Z. Maximum Lifetime Routing in Wireless Ad-hoc Networks [A]. In INFOCOM' 2004[C], 2004.

[11] Xue Y, Cui Y, Nahrstedt K. Maximizing Lifetime for Data Aggregation in Wireless Sensor Networks [EB/OL]. http://cairo.cs.uiuc.edu/publications/paper-files/xue-monet.pdf.

[12] 刘家壮, 徐源, 著. 网络最优化[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991.

[13] Harary F, 著. 李慰萱, 译. 图论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.

[14] 卢开澄, 卢华明, 著. 图论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.