

一个分析与计算曲面结构的有效方法*

王兴波^{1,2},石金龙¹,陈希祥¹

(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院,湖南 长沙 410073; 2. 南海东软信息技术学院,广东 佛山 528225)

摘要 :给出了一种分析计算 CAD 曲面模型的数值方法。该方法将构成 CAD 模型的曲面片视作计算单元(面素单元),建立各面素单元的控制方程,再结合 CAD 曲面模型的流形特征组装各个单元控制方程以求整体解。面素单元的控制方程可根据问题的求解目标分别利用有限元—边界元耦合、有限元—无单元及其他耦合形成。结合线弹性问题的求解,系统地介绍了面素单元法的单元划分与处理、单元控制方程建立等核心环节。还给出了一个分析三侧圆过渡面静载荷变形的实例及其与 ANSYS 对照的结果。

关键词 :CAD 模型;流形;线弹性变形;结构分析

中图分类号 :TH122 文献标识码 :A

An Efficient Numerical Method to Compute and Analyze CAD Surface Model

WANG Xing-bo^{1,2},SHI Jin-long¹,CHEN Xi-xiang¹

(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Nanhai Neusoft Institute of Information, Foshan 528225, China)

Abstract :This paper presents a numerical method to compute CAD surface models. The method first divided a CAD model into a sequence of subfields, each of which is a simple surface-patch of the CAD model. Then, by setting up the governing equations for the patch-element, it computed the total field by assembling governing equations of all subfields into the global equations of the total field according to the manifold structure of the CAD model. The element's governing equations can be formed by coupling finite element (FE) with boundary element (BE), and FE with element free (EF) or else according to the objective of the computed problems. The paper systematically demonstrates the key procedures of selecting elements and setting up governing equations via a solution process of linear elastic problems. A numerical example with comparison to ANSYS computation is shown in the analysis of deformation on a blending surface of three-rounded corner. Finally the static loads are presented before the paper comes to an end.

Key words :CAD model; manifold; linear elastic deformation; structure analysis

工业产品表面在几何上一般表达为分段分片连续的复杂曲面,故其建模和工程分析在数学上归结为复杂曲面的力学性能分析,亦即对复杂曲面在力作用下的变形过程进行仿真和模拟。有限元(FEM)、边界元(BEM)、石根华的数值流形方法(NMM)^[1-2]和无网格 Galerkin 方法(EFGM)^[3-4]是常用的数值方法,在计算的实现上各有千秋。有限元是以对计算模型进行有限元网格划分为前提的,边界元以将求解域内的积分转换到边界单元的计算为基础,无网格 Galerkin 方法则将求解域内的连续积分转换为域内有限个离散点的计算。由于复杂曲面的网格划分是复杂且耗时的工作,使得有限元在处理动态成型过程模拟、裂纹演变等工程问题上不尽如意^[5-6]。尽管边界元对于简单曲面结构的计算域表现出很好的性能,但是对于具有流形结构的复杂 CAD 模型还没有行之有效的处理方法,尤其在求解基本解方面。石法和无网格 Galerkin 方法在稳定性、时效问题等方面还不能与有限元、边界元方法媲美^[7]。

利用 FEM 与 BEM 的优点,将二者耦合起来解决问题很早就成为工程分析的一个重要手段^[8-9],并且一直是计算力学研究的热点^[10-12]。启发于这种思想,笔者在文献[13]里提出了基于 FEM-BEM 耦合

* 收稿日期 2005-12-07

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50175106);广东省自然科学基金资助项目(04021250);现代车身技术教育部重点实验室开放基金资助项目

作者简介:王兴波(196—),男,副教授,博士。

的面素单元方法(PEM)。面素单元法依据复杂曲面流形结构的局部可解析性与全局关联性,将CAD模型计算域按照其曲面片的数学边界划分成若干互相关联的计算子域(即面素单元),建立各面素单元的控制方程,经组装以求整体解。文献[13]详细介绍了PEM法的原理和基本特征。本文结合线弹性问题的求解,系统地介绍了面素单元法的单元划分与处理、单元控制方程建立等核心环节。文章首先介绍了面素单元的选取和处理,然后依据加权余量原理推导出线弹性问题面素单元的控制方程,最后给出了一个分析三倒圆过渡面静载荷变形的实例及其与ANSYS对照的结果。

1 PEM 计算单元的划分与处理

由文献[13]知,CAD模型表面实际上是由简单曲面片拼接而成的二维流形,其流形表达式为

$$S = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

这里 U_{α} 代表一张具有精确数学参数表达式 $U_{\alpha} = U_{\alpha}(u, v)$ 简单曲面片,相邻两个简单曲面片 U_{α} 、 U_{β} 至少满足 C^0 连续且不相互重叠。

PEM取简单曲面片 U_{α} 作为计算单元,并作如下处理:

(1)沿 U_{α} 的原有边界 $\Gamma_{\alpha} = \{\gamma_1^{\alpha}, \gamma_2^{\alpha}, \dots, \gamma_n^{\alpha}\}$ 作虚拟边界 $\Gamma_c = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ 将 U_{α} 分为两个部分: Ω_1, Ω_2 ,如图1(a)所示;

- (2)对区域 Ω_1 采用边界元分析线弹性问题,采用无单元法分析非线性问题;
- (3)对区域 Ω_2 用有限元分析,并基于 Ω_2 建立 U_{α} 与相邻简单曲面片之间的联结关系;
- (4)将两个区域的控制方程按照有限元格式进行耦合,形成单元控制方程。

由于CAD模型上的简单曲面片都具有数学解析式,故对计算单元作以上处理有如下优点:

- (1)可以利用边界元法或无单元法处理区域 Ω_1 ;
- (2)区域 Ω_2 易于进行有限元网格划分;
- (3)相邻单元 U_{α} 、 U_{β} 可通过有限元耦合关联,如图1(b)所示。

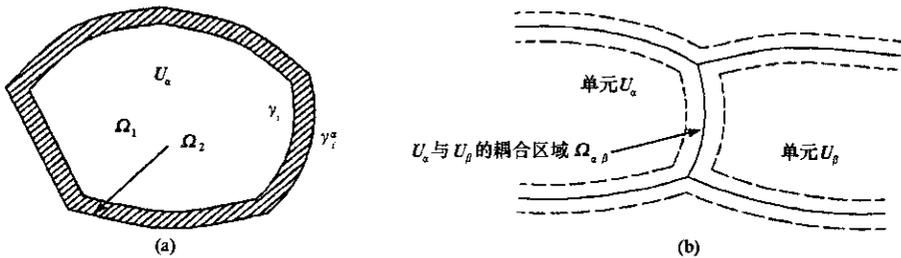


图1 PEM 的计算单元选取与处理
Fig.1 Selection and process of PEM elements

2 单元上线弹性问题的积分关系式

由上节分析,PEM采用边界元、有限元耦合计算线弹性问题。为此,假定单元 U_{α} 上 Ω_1 、 Ω_2 两个部分在虚拟边界 Γ_c 上的法向量为 n ,位移为 U_c ,面力为 P_c ;记 σ, f 分别为单元上的应力与体力,那么采用张量表示则存在以下关系:

单元上的平衡微分方程:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{1}$$

Ω_1 的边界条件: $p_i = \sigma_{ij}n_j = p_i^c$ ($i, j = 1, 2, 3$) (在 Γ_c 上)

Ω_2 的边界条件: $p_i = \sigma_{ij}n_j = p_i^{\alpha}$ ($i, j = 1, 2, 3$) (在 Γ_{α} 上)

$p_i = \sigma_{ij}n_j = p_i^c$ ($i, j = 1, 2, 3$) (在 Γ_c 上)

现在分别考虑 Ω_1 及 Ω_2 上的积分方程。首先对 Ω_1 用加权余量法,取权函数为虚位移 u_i^* ,由式(1)得:

$$\int_{\Omega_2} (\sigma_{ij,j} + f_i) u_i^* d\Omega = 0 \quad (2)$$

由于

$$(\sigma_{ij} u_i^*)_j = \sigma_{ij,j} u_i^* + \sigma_{ij} u_{i,j}^* \quad (3)$$

得

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega_1} [(\sigma_{ij} u_i^*)_j] d\Omega - \int_{\Omega_1} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega$$

依据 Green 公式 $\int_{\Omega_1} [(\sigma_{ij} u_i^*)_j] d\Omega = \int_{\Gamma_c} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma$ 及边界条件 $\sigma_{ij} n_j = p_i$ 得

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega_1} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_c} p_i u_i^* d\Gamma \quad (4)$$

设 ε_{ij}^* 、 σ_{ij}^* 是对应于 u_i^* 的应变与应力, 即

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*), \quad \sigma_{ij}^* = 2G\varepsilon_{ij}^* + \lambda\varepsilon_{kk}^* \delta_{ij}$$

这里 G 、 λ 为 Lamé 常数。

再由应力张量的对称性得:

$$\sigma_{ij} u_{i,j}^* = \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j}^* + \frac{1}{2} \sigma_{ji} u_{j,i}^* \right) = \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} u_{i,j}^* + \frac{1}{2} u_{j,i}^* \right) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^*$$

由功互等原理知 $\int_{\Omega_1} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega$ 结合式(4)得:

$$\int_{\Omega_1} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_c} p_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Omega_1} u_j f_j^* d\Omega + \int_{\Gamma_c} u_j p_j^* d\Gamma \quad (5)$$

将 $\sigma_{ij,j}^* + f_i^* = 0$ 代入式(5) 经整理可得:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega_1} f_i u_i^* d\Omega = - \int_{\Gamma_c} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_c} u_j p_j^* d\Gamma \quad (6)$$

此即力的边界条件下边界元方法的一般积分关系式。

参考文献[14]的虚位移选择及推导过程, 选择虚位移 u_i^* 使得下式成立:

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Q}) e_i = 0$$

这里 δ 为 Dirac- δ 函数, e_i 是单位矢量在第 i 个方向上的分量, 最后得到 Ω_1 内点以及边界点上的边界积分方程:

$$u_i(\mathbf{Q}) = \int_{\Gamma_c} p_j^c u_{ij}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega_1} f_j u_{ij}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma_c} p_{ij}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{x}) u_j^c d\Gamma \quad (7)$$

$$c_{ij}(\mathbf{Q}) u_j(\mathbf{Q}) + \int_{\Gamma_c} p_{ij}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{x}) u_j^c d\Gamma = \int_{\Gamma_c} p_j^c u_{ij}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega_1} f_j u_{ij}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{x}) d\Omega \quad (8)$$

其中

$$c_{ij}(\mathbf{Q}) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_c} p_{ij}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

以下推导 Ω_2 上的有限元控制方程。首先写出弹性力学的加权余量式

$$\int_{\Omega_2} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma_c} (p_i - p_i^c) \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_a} (p_i - p_i^a) \delta u_i d\Gamma \quad (9)$$

对式(9)左端利用式(3)进行类似的处理, 则有

$$\int_{\Omega_2} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma_c \cup \Gamma_a} \delta u_j \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega_2} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega$$

又 $\varepsilon_{ij} = (\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i})$, 且 $\sigma_{ij} n_j = p_i$, 结合式(9)得到有限元的控制方程:

$$\int_{\Omega_2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_2} f_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_c} p_i^c \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_a} p_i^a \delta u_i d\Gamma \quad (10)$$

若将 δ_{ui} 视作满足位移约束的虚位移, 则得到式(10)的虚功原理泛函表达式。

$$\Pi(u) = \int_{\Omega_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega_1} f_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_c} p_i^c u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_a} p_i^a u_i d\Gamma \quad (11)$$

将上式中的体力、面力转化为等效节点力, 运用 Ritz 法, 可得到控制方程的适合于计算机处理的离散形式。

3 单元上的离散控制方程

为了方便计算机处理, 采用以下方式进行单元离散:

- (1) 在虚拟边界 Γ_c 上取 n 个节点, 将边界 Γ_c 划分为 n 段;
- (2) 在原有边界 Γ_a 的相应位置取 n 个节点, 并将两条边界上的对应节点连接。

结合式(8)、式(11), 可得到控制方程的离散形式:

$$HU_C^1 = GP_C^1 + B \quad (12)$$

$$KU = F + D \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_C^2 \\ U_a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_C^2 \\ F_a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

这里 U_C^1, P_C^1, B 分别是虚拟边界上边界元节点的位移矢量、面力矢量和体力矢量, H, G 是按照边界元控制列式产生的矩阵, U_a, U_C^2 分别是有限元列式在边界 Γ_a 及 Γ_c 上的位移矢量, F_a, F_C^2 是对应的边界面力, D_1, D_2 为 Ω_1, Ω_2 的体力。

式(14)、式(12)耦合的关键在于对面力 P_C^1 和 F_C^2 的处理, 前者取的是面力函数在节点处的值, 后者却是将面力等效为节点集中力所得。由此不难根据力做功的等效性得到二者的关系:

$$F_C^1 = MP_C^1 \quad (15)$$

这里 M 为等效力矩阵, 可参考文献[14]之式(5.9.13)计算。

把式(15)代入式(12)可以得到:

$$K^1 U_C^1 = F_C^1 + D_3 \quad (16)$$

其中, $K^1 = MG^{-1}H, F_C^1 = MP_C^1, D_3 = MG^{-1}B$ 。

通过平衡条件和相容性条件:

$$\begin{cases} F_C^1 = F_C^2 = F_C \\ U_C^1 = U_C^2 = U_C \end{cases} \quad (17)$$

由式(14)、式(16)最后可以得到耦合后的方程组:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & -I \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 \\ K^1 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_C \\ U_a \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

此即单元上的离散控制方程。求此方程组可以得到 U_C, U_a, F_C , 代入式(15)便可求得 P_C^1 , 利用式(7)便可得到域 Ω_1 内任一点的位移。

4 数值算例

三倒圆过渡面是 CAD 模型的一种典型结构, 广泛存在于工业产品中。本节给出了此结构在静载荷作用下的变形分析结果, 并给出了分析结果与通用有限元软件 ANSYS 在同样条件及约束下的分析结果对照。

4.1 计算模型及相关参数

三倒圆过渡面的几何模型如图 2(a) 所示。由图可见, 该模型由 7 个简单曲面片组成, 具有典型的流形结构。计算中赋予该模型的物理参数为:

表 1 计算模型的物理参数

Tab.1 Material parameters for the computation

计算模型	弹性模量	泊松比	厚度(mm)	载荷(N)
线弹性	2.07×10^{11}	0.3	2	3000

选择载荷作用点为三倒圆过渡面的几何中心, 沿内法线方向, 所有边界全部固定。以下是用 ANSYS 自带的 FEM 求解器和 PEM 求解的分析对照。

4.2 网格模型比较

图 2(b)(c) 分别是利用 ANSYS 网格划分工具划分的 FEM 网格与 PEM 网格。从图中可以看出, FEM 需要在整个求解域上划分网格; PEM 则只需在模型解析曲面片的数学边界上构造边界桥并划分网格, 显著地降低了网格划分工作量。

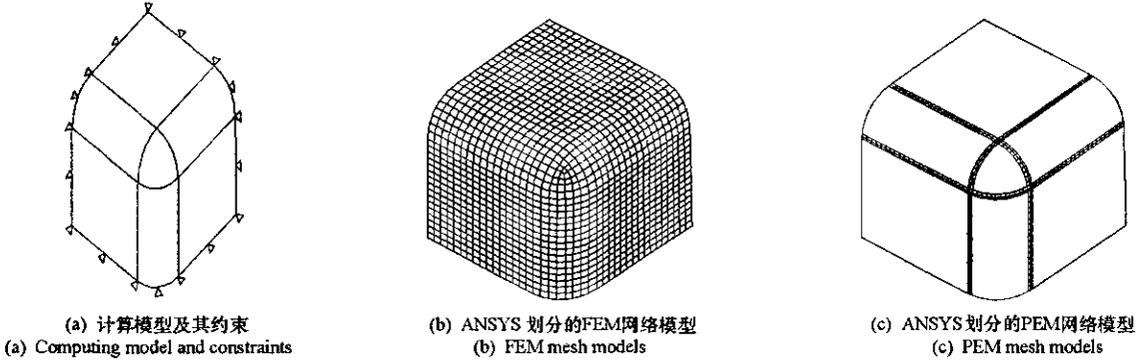


图 2 FEM 与 PEM 的网格对照

Fig.2 Comparison of mesh models between FEM and PEM

4.3 计算结果对照

结合图 2(a) 所示的约束及表 1 给出的计算模型参数, 分别调用 ANSYS 自带的 FEM 求解器及笔者设计的 PEM 求解器, 可分别得到等效应力等值线分布图如图 3 和图 4 所示。

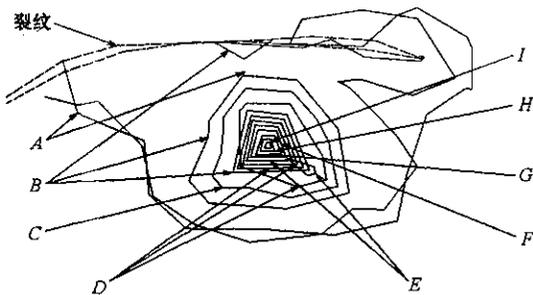


图 3 FEM 分析的等效应力等值线分布示意图
Fig.3 Stress distributive cunes computed by FEM

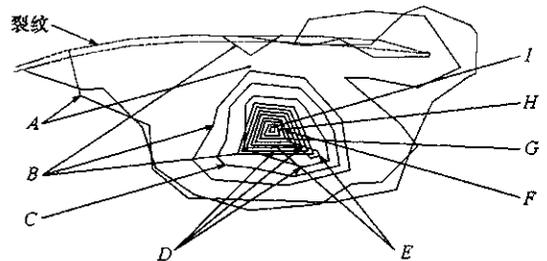


图 4 PEM 分析的等效应力等值线分布示意图
Fig.4 Stress distributive curves computed by PEM

表 2 FEM 分析的等值线等效应力值

Tab.2 Stress value via FEM

等值线	A	B	C	D	E
等效应力值	83.562	250.287	417.012	583.737	750.462
等值线	F	G	H	I	
等效应力值	917.187	1084.356	1251.432	1417.843	

表 3 PUM 分析的等值线等效应力值

Tab.3 Stress value via PEM

等值线	A	B	C	D	E
等效应力值	83.943	250.290	417.012	583.736	750.462
等值线	F	G	H	I	
等效应力值	917.187	1084.360	1251.435	1417.863	

对计算结果的等效应力等值线图 3 和图 4 进行比较,同时结合表 2、表 3 所示的等效应力值,可以看出二者的分析结果基本吻合,表明 PEM 是有效的。

参 考 文 献 :

- [1] Shi Gen Hua. Manifold Method of Material Analysis[A]. Transactions of the Ninth Army Conference on Applied Mathematics and Computing[C], Minneapolis , Minnesoda , USA ,1992.
- [2] Shi Gen Hua. Manifold Method[A]. Proc. of the First Int. Forum on Discon. Defor. Anal. Simu. of Discon. Media[C],California ,USA ,1996.
- [3] Belytschko T , et al. Element-free Galerkin Method[J]. International Journal of Numeric Methods in Engineering ,1994 ,34(2) 229 – 256.
- [4] Belytschko T , et al. Meshless Method : An Overview and Recent Developments[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , 1996 ,139(6) 3 – 47.
- [5] Duarte C A. A Review of Some Meshless Methods to Solve Partial Differential Equations[R]. TICAM Report ,1995.
- [6] Yagawa G , Furukawa T. Recent Developments of Free Mesh Method[J]. Int. J. Numeri. Methods Eng. ,2000 47 :1419 – 1443.
- [7] Wang Z Y , Li Y P. Numerical Manifold Method and Its Development [J]. Advances in Mechanics(In Chinese) ,2003 ,22(5) 261 – 266.
- [8] Atluri S N , Grannell J J. Boundary Elements Methods and Combination of BEM-FEM[R]. GIT-ESM-SA-78-16 , Dec. ,1978.
- [9] Johnson C , Nedelec J. On the Coupling of BEM and FEM[J]. Math. Comp. , 1980 35(11) :1063 – 1079.
- [10] Chamaly S , Rardar R , et al. SAW Device Analysis Using a Combination of FEM/BEM Calculations and Scanning Interferometr Meseasurements [J]. IEEE Ultrasonics Symposium-294 ,IEEE ,2003.
- [11] Sarkar A , Sonti V R , Pratap R. A Coupled FEM-BEM Formulation in Structural Acoustics for Imaging a Material Inclusion[J]. International Journal of Acoustics and Vibration , 2005 ,10(1) 3 – 16.
- [12] Rapum M L , Sayas F J. A Mixed FEM and BEM Coupling for the Approximation of the Scattering of Thermal Waves in Locally non-homogeneous Media[EB/OL]. <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2005/preprint10>.
- [13] Wang X B , Shi D Q. Patch Unit Method for CAD Surface Models[A]. Yan X T , Jiang C Y , Juster N P. Perspectives from Europe and Asia on Engineering Design and Manufacture[C],Netherlan : Kluwer Academic Publisher ,2004 99 – 108.
- [14] Yang D Q , Zhao Z S. Boundary Element and Application[M]. Beijing : Press of Beijing Science and Technology , 2002.

