文章编号:1001－2486(2006)03－0120－04

非自伴情形下时滞抛物方程的惯性流形*

朱健民,李　祥,黄建华
(国防科技大学 理学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:利用 Lyapunov-Perron 方法在适当的谱间隙条件和适当小的时滞假设下,证明了一类非自伴算子情形下半线性时滞抛物方程惯性流形的存在性。

关键词:非自伴算子;时滞抛物方程;惯性流形
中图分类号:O175.2　　文献标识码:A

Inertial Manifolds of Parabolic Partial Differential Equations with Time Delays in the Non-self Adjoint Case

ZHU Jian-min, LI Xiang, HUANG Jian-hua
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The present paper deals with the long time behavior of semilinear parabolic equations with time delays in the non-self adjoint case. Under the condition of right spectral gap and the assumption of properly small delay time, the existence of inertial manifolds is proved by Lyapunov-Perron method.

Key words: non-self adjoint operator; parabolic equations with time delays; inertial manifold

无穷维动力系统的长时间性态到目前为止已得到广泛的研究,其中惯性流形是一个非常重要的研究对象,通过它可以将无穷维动力系统的长时间性态约化为有限维空间中常微分方程解的长时间性态。例如文献[2,5]研究了

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=F(u) \tag{1}$$

在适当的谱间隙条件下惯性流形的存在性。对于偏泛函微分方程,文献[3]研究了一类半线性时滞抛物方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=B(u_t),\quad u(\theta)=u_0\in C_\beta,\quad \theta\in[-r,0] \tag{2}$$

解的长时间性态,并在 A 为自伴算子且有紧的逆算子的假设下证明了惯性流形的存在性。然而在许多情况下 A 并不都是自伴算子,文献[2,5]的结论就不一定成立,因此需要研究在非自伴情形下的相关结论。由于非自伴算子的谱性质要比自伴算子的谱性质复杂得多,关于此类情形的研究结果不多。文献[4]研究了方程(1)当 A 为非自伴算子时解的长时间行为,证明了惯性流形的存在性。受文献[3－4]的启发,我们考虑式(2)当 A 为非一类自伴算子时的长时间性态,利用 Laypunov-Perron 方法证明系统(2)存在惯性流形。

为便于讨论,作如下假设:

(H1)
$$v\to B(v)=B_0(v(0))+B_1(v) \tag{3}$$

$$\|B_0(w_1)-B_0(w_2)\|\leqslant M_0\|A^\beta(w_1-w_2)\|,\quad w_1,w_2\in D(A^\beta) \tag{4}$$

$$\|B_1(v_1)-B_1(v_2)\|\leqslant M_1|v_1-v_2|_{C_\beta},\quad v_1,v_2\in C_\beta \tag{5}$$

* 收稿日期:2006－01－06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571175)
作者简介:朱健民(1963—),男,教授,博士生。

其中 $C_\beta = C(-r,0;D(A^\beta))$,$|v|_{C_\beta} \equiv \sup_{\theta\in[-r,0]} \| A^\beta v(\theta) \|$,$B_0:D(A^\beta)\to H$,$B_1:C_\beta\to H$,$M_0$,$M_1$ 为正常数。

(H2) A 是一类非自伴算子(其定义和性质与文献[4]相同,在此略),投影算子 $P = P_\alpha = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_\alpha} R(\lambda, A)\mathrm{d}\lambda$,$Q = I - P$。

附注:当 A 是非自伴算子时,$\| P \|_{L(H)} \neq 1$。定义 $N(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_\alpha} \| R(\lambda, A) | \mathrm{d}\lambda \|$。由文献[4]可知,$N(\alpha)$ 有界,且有 $\| P \|_{L(H)} \leqslant N(\alpha)$。

命题 1.1[10] $\forall \beta > 0$,$A^\beta:D(A^\beta)\to H$ 是稠定算子,对于 $\alpha\geqslant\beta\geqslant 0$,有 $D(A^\alpha)\subseteq D(A^\beta)$。而且对任意给定的 $\beta\geqslant 0$,$T(t)$ 映 H 到 $D(A^\alpha)$,$t>0$,且满足

$$\| A^\beta T(t) \|_{L(H)} \leqslant M_\beta t^{-\beta} \mathrm{e}^{-\delta t} \tag{6}$$

这里 $0<\delta\leqslant\delta_0$,$M_\beta>0$。设 $T_P(t)$,$T_Q(t)$ 分别表示由 $-A_P$,$-A_Q$ 在 $H_P = PH$,$H_Q = QH$ 上生成的算子半群。假设选取 $\alpha = \alpha_q$,使得

$$\sigma(A)\cap\{\lambda:\alpha_p\leqslant Re\lambda\leqslant\alpha_q\} = \phi \tag{7}$$

此时式(6)变为

$$\| A_Q^\beta T_Q(t) \|_{L(H_Q)} \leqslant M_\beta t^{-\beta} \mathrm{e}^{-\alpha_q t} \tag{8}$$

由文献[8-9]可知系统(2)存在唯一解 $u(t)$,使得 $u(t) = \mathrm{e}^{-tA}u(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}B(u_\tau)\mathrm{d}\tau\,(t\geqslant 0)$,因此可以定义半群 $S(t)$ 使得 $u_t = S(t)u_0\,(t\geqslant 0)$,其中 $u_0, u_t\in C_\beta$。

定义 C_β 中的投影算子 $\hat{P}$,$\hat{Q}$ 如下:$\hat{P}\psi = \mathrm{e}^{-\theta A}P\psi(0)$,$\forall\psi\in C_\beta$,$\hat{Q} = 1 - \hat{P}$。

1 主要结果

定义 $\gamma = \alpha_p + \mu\alpha_p^\beta(\sec\ w_0)^\beta$,$M(\gamma, r) = M_0 + M_1\mathrm{e}^{\gamma r}$,$\delta = \frac{2}{\mu}M(\gamma, r)N(\alpha)$。其中 $\mu > 4N(\alpha)(M_0 + M_1)$。下面给出本文的主要结果。

定理 假定如下谱间隙条件

$$\sigma(A)\cap\{\lambda\in C, \alpha_p\leqslant Re\lambda\leqslant\alpha_q\} = \psi \tag{9}$$

$$\alpha_q - \alpha_p > \mu\alpha_p^\beta(\sec\ w_0)^\beta + M_\beta(\alpha_q-\alpha_p)^\beta\Gamma(1-\beta) \tag{10}$$

成立,且 r 足够小,使得

$$\delta = N(\alpha)\frac{2}{\mu}M(\gamma, r) < \frac{1}{2} \tag{11}$$

则存在 Lipschitz 映射 $\Phi:PH\to(1-\hat{P})C_\beta$,使得 N 维流形 $\mu = \{\hat{p}(\theta) + \Phi(\hat{p}(0),\theta):\hat{p}(\theta)\in\hat{p}C_\alpha\}\subset C_\alpha$ 为满足下列性质的惯性流形:

(1) Lipschitz 条件:

$$\| A^\beta(\Phi(p_1,\theta) - \Phi(p_2,\theta)) \| \leqslant \frac{\delta}{1-\delta}\mathrm{e}^{-\gamma\theta} \| A^\beta(p_1 - p_2) \| \tag{12}$$

(2) 正不变性:

$$S(t)\mu\subset\mu,\quad t\geqslant 0 \tag{13}$$

(3) 指数吸引性:对任意 $u_0\in C_\alpha$,存在 $u_0^*\in C_\beta$,使得下式成立

$$|S_t u_0 - S_t u_0^*|_{C_\beta} \leqslant 4\mathrm{e}^{-\gamma(t-r)}|(1-\hat{P})u_0 - \Phi(Pu_0)|_{C_\beta} \tag{14}$$

2 定理的证明

定义 $\varepsilon_{\beta,\eta}^- = \{v(t):|v|_\eta = \mathrm{esssup}_{t\in\mathbf{R}_-}\{\mathrm{e}^{\eta t}\| A^\beta v(t) \| < \infty\}\}$ 及其上面的映射

$$B_p^-[v](t)=\mathrm{e}^{-tA}p+\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}PB(v_\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}QB(v_\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\leqslant 0 \tag{15}$$

其中 $p\in PH$。下证映射 $B_p^-(\cdot)$在 $\varepsilon_{\beta,\gamma}^-$中存在不动点。显然 $B_p^{-1}(\cdot)$将 $\varepsilon_{\beta,\gamma}^-$映到它自身。由文献[4]知

$$\| A_P^\beta \mathrm{e}^{-tA}P\| \leqslant(\sec\ w_0)^\beta \alpha_p^\beta N(\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha_p t},\quad t\leqslant 0 \tag{16}$$

由式(3)~(5)可得

$$\| B(u_\tau)-B(v_\tau)\| \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma\tau}M(\gamma,r)|u-v|_\gamma,u,v\in\varepsilon_{\beta,\gamma}^-,\quad t\leqslant 0 \tag{17}$$

由式(8),(16),(17)知,对任意 $p\in PH,v_1,v_2\in\varepsilon_{\beta,\gamma}^-$,有

$$\begin{aligned}&|B_p^{-1}[v_1](t)-B_p^{-1}[v_2](t)|_\gamma\\ \leqslant&\left[\frac{\alpha_p^\beta(\sec\ w_0)^\beta}{\gamma-\alpha_p}+M_\beta(\alpha_q-\gamma)^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)\right]N(\alpha)M(\gamma,r)|v_1-v_2|_\gamma\end{aligned} \tag{18}$$

由已知条件 $\gamma=\alpha_p+\mu\alpha_p^\beta(\sec\ w_0)^\beta$,则当式(9)~(11)成立时可得 $B_p^{-1}(\cdot)$的压缩性质,因此方程

$$v(t)=\mathrm{e}^{-tA}p+\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}PB(v_\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}QB(v_\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\leqslant 0 \tag{19}$$

存在唯一的解 $v(t)$。

定义算子 $\Phi:PH\rightarrow(1-\hat{p})C_\alpha$ 如下:

$$\Phi(p,\theta)=\int_{-\infty}^\theta \mathrm{e}^{-(\theta-\tau)A}QB(v_\tau)\mathrm{d}\tau-\int_\theta^0 \mathrm{e}^{-(\theta-\tau)A}PB(v_\tau)\mathrm{d}\tau\equiv v(\theta,p)-\mathrm{e}^{-A\theta}p$$

其中 $v_\tau(\theta)=v(\tau+\theta),v(t)=v(t,p)$为方程(19)的解。下证 $\Phi(p,\theta)$为 Lipschitz 映射。

$$\begin{aligned}&\| A^\beta[v_1(t,p_1)-v_2(t,p_2)]\|\\ \leqslant&\| \mathrm{e}^{-tA}A^\beta(p_1-p_2)\| +\int_t^0 \| A^\beta\mathrm{e}^{-(t-\tau)A}p\| \cdot \| B(v_{1\tau})-B(v_{2\tau})\| \mathrm{d}\tau\\ &+\int_{-\infty}^t \| A^\beta\mathrm{e}^{-(t-\tau)A}Q\| \cdot \| B(v_{1\tau})-B(v_{2\tau})\| \mathrm{d}\tau\\ \leqslant&\mathrm{e}^{-t\alpha_p}\| A^\beta(p_1-p_2)\| +\delta|v_1-v_2|_\gamma\cdot \mathrm{e}^{-\gamma t}\end{aligned}$$

其中 v_1,v_2 分别为对应 p_1,p_2 的方程(19)的解。

于是有

$$|v(\cdot,p_1)-v(\cdot,p_2)|_\gamma<(1-\delta)^{-1}\| A^\beta(p_1-p_2)\| \tag{20}$$

由此可得 $\| A^\beta(\Phi(p_1,\theta)-\Phi(p_2,\theta)\| \leqslant\frac{\delta}{1-\delta}\mathrm{e}^{-\gamma\theta}\| A^\beta(p_1-p_2)\|$。因此,式(12)成立。类似于文献[3],易证式(13)。

最后证明式(14)。定义连续函数空间 $\mathscr{B}_{\beta,\gamma}^+$如下:

$$\mathscr{B}_{\beta,\gamma}^+=\{w\,|\,|w|_{\gamma,+}=\mathrm{esssup}_{t\geqslant -r}\{\mathrm{e}^{\gamma t}\| A^\beta w(t)\| <\infty\}$$

记 $\hat{q}(\theta)=(1-\hat{p})u_0^*(\theta)-(1-\hat{p})u_0(\theta)$。假定

$$w(t)|_{t=\theta\in[-r,0]}=\hat{q}(\theta)-\mathrm{e}^{-A\theta}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\tau A}p[B(w_\tau+u_\tau)-B(u_\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{21}$$

$$\begin{aligned}w(t)=&\mathrm{e}^{-tA}\hat{q}(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}Q(B(w_\tau+u_\tau)-B(u_\tau))\mathrm{d}\tau\\ &-\int_t^\infty \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}P(B(w_\tau+u_\tau)-B(u_\tau))\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0\end{aligned} \tag{22}$$

注意到 $u_0^*(\theta)\in\mu$,则有$(1-\hat{p})u_0^*(\theta)=\Phi(pu_0^*(0),\theta)$,于是

$$\hat{q}(\theta)=-[(1-\hat{p})u_0](\theta)+\Phi(pu_0(0)-\int_0^\infty \mathrm{e}^{\tau A}p(B(w_\tau+u_\tau)-B(u_\tau))\mathrm{d}\tau \tag{23}$$

下面只需证明 $w(t)$ 的存在性,亦即证明映射

$$\mathscr{B}^{+}(w)(t)=\begin{cases}\hat{q}(t)-\mathrm{e}^{-At}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\tau A}P[B(w_\tau+u_\tau)-B(u_\tau)]\mathrm{d}\tau, & -r\leqslant t\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-At}\hat{q}(0)+\int_0^{t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)A}Q[B(w_\tau+u_\tau)-B(u_\tau)]\mathrm{d}\tau \\ \qquad -\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-(t-\tau)A}P[B(w_\tau+u_\tau)-B(u_\tau)]\mathrm{d}\tau, & t\geqslant 0\end{cases}$$

在 $\mathscr{B}^{+}_{\beta,\gamma}$ 中存在不动点。

假定 $w_j(t)\in\mathscr{B}^{+}_{\beta,\gamma}(j=1,2)$。令 $D_j(\tau)=B(w_{j\tau}+u_\tau)-B(u_\tau)$,则有

$$\| D_1(\tau)-D_2(\tau)\|\leqslant \mathrm{e}^{\gamma\tau}M(\gamma,r)\,|w_1-w_2|_{\gamma,+},\quad \forall\, w_1,w_2\in\mathscr{B}^{+}_{\beta,\gamma}$$

当 $t\geqslant 0$ 时,$\| A^{\alpha}(\mathscr{B}^{+}(w_1)(t)-\mathscr{B}^{+}(w_2)(t))\|\leqslant \mathrm{e}^{-t\alpha_q}\| A^{\alpha}(\hat{q}_1(0)-\hat{q}_2(0)\|+\delta\mathrm{e}^{-\gamma t}|w_1-w_2|_{\gamma,+}$。

同样地,当 $\theta\in[-r,0]$ 时

$$\| A^{\alpha}[\mathscr{B}^{+}(w_1)\theta-\mathscr{B}^{+}(w_2)(\theta)]\|\leqslant\| A^{\alpha}(\hat{q}_1(0)-\hat{q}_2(0))\|+\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-\theta\alpha_p}\cdot M(\gamma,r)N(\alpha)\,|w_1-w_2|_{\gamma,+}$$

由于

$$\hat{q}_1(\theta)-\hat{q}_2(\theta)=\Phi(pu_0(0)-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\tau A}P[B(w_{1\tau}+u_\tau)-B(u_\tau)]\mathrm{d}\tau,\theta)-\Phi(pu_0(0)$$
$$-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\tau A}P[B(w_{2\tau}+u_\tau)-B(u_\tau)]\mathrm{d}\tau,\theta)$$

根据映射 Φ 的 Lipschitz 性质可得 $\| A^{\alpha}[\hat{q}_1(\theta)-\hat{q}_2(\theta)]\|\leqslant\frac{\delta}{1-\delta}\mathrm{e}^{-\gamma\theta}\int_0^{\infty}\| A^{\alpha}\mathrm{e}^{\tau A}P[D_1(\tau)-D_2(\tau)]\|\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{\delta}{1-\delta}\mathrm{e}^{-\gamma\theta}\cdot\frac{\delta}{2}|w_1-w_2|_{\gamma,+}$。于是 $\|\mathscr{B}^{+}(w_1)(t)-\mathscr{B}^{+}(w_2)(t)\|_{\gamma,+}\leqslant[\delta+\frac{\delta^2}{2(1-\delta)}]|w_1-w_2|_{\gamma,+}$。因此当 $0<\delta<2-\sqrt{2}$ 时即可得 $\mathscr{B}^{+}$ 的压缩性质。同样可得 $\mathrm{e}^{\gamma t}\| A^{\alpha}\mathscr{B}^{+}(w)(t)\|\leqslant|(1-\hat{P})u_0-\Phi(Pu(0))|_{C_\beta}+[\frac{\delta^2}{2(1-\delta)}+\delta]|w|_{\gamma,+},t\geqslant -r$,即 $|\mathscr{B}|^{+}(w)_{\gamma,+}\leqslant[1-\frac{\delta^2}{2(1-\delta)}-\delta]^{-1}|(1-\hat{P})u_0-\Phi(Pu(0))|_{C_\beta}$。故 $\mathscr{B}^{+}(\cdot)$ 是 $\mathscr{B}^{+}_{\alpha,\gamma}$ 中的自映射。因此存在 $w(t)$ 为 $\mathscr{B}^{+}(\cdot)$ 的唯一的不动点,此时即有

$$|w|_{\gamma,+}\leqslant[1-\frac{\delta^2}{2(1-\delta)}-\delta]^{-1}|(1-\hat{P})u_0-\Phi(Pu(0))|_{C_\beta}$$

当 $0<\delta<\frac{1}{2}$ 时,有 $\| w\|_{\gamma,+}\leqslant 4|(1-\hat{P})u_0-\Phi(Pu(0))|_{C_\beta}$,从而定理得证。

参 考 文 献:

[1] Monvel L, Chueshov I, Rezounenko A. Inertial Manifolds for Delayed Semilinear Parabolic Equations[J]. Nonlinear Analysis, 1998, 34:907 – 925.

[2] 戴正德,郭柏灵. 惯性流形与近似惯性流形[M],北京:科学出版社,2000.

[3] Foias C, Temann S R. Inertial Manifolds for Nonlinear Evolutionary Equations[J]. Journal of Differential Equations, 1998, 73:309 – 353.

[4] Sell G. Inertial Manifolds: The Non-self-adjoint Case. [J] Journal of Differential Equations, 1992, 96:203 – 255.

[5] Teman R. Infinity-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M], New York, Springer-Verlag, 1998.

[6] Wang L, Xu D. Asymptotic Behavior of Reaction-diffusion Equations with Delays[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 281:439 – 452.

[7] So J, Wu J. Topological Dimensions of Global Attractors for Semilinear PDE's with Delays[J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1991, 43(3):407 – 422.

[8] Travis C, Webb D. Existence and Stability for Partial Functional Differential Equations[J]. Transactions AMS[J], 1974, 200:395 – 418.

[9] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations[M]. Springer-Verlag, New York, 1996.

[10] Pazy A. Semigroups of Linear Operations and Applications to P. D. E[M]. Springer-Verlag, New York, 1983.