

# 小子样条件下基于 Normal-Poisson 过程的性能可靠性评定\*

张永强<sup>1,2</sup>, 刘琦<sup>1</sup>, 周经伦<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学 信息系统与管理学院, 湖南 长沙 410073; 2. 北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094)

**摘要** :对于高可靠、长寿命产品,基于性能退化数据分析可靠性是一种行之有效的技术途径。结合航空航天产品性能退化的机理与现场试验小子样的特点,建立了基于 Normal-Poisson 过程的性能退化模型。论文在对产品性能退化建模的基础上,结合 Bayes 方法给出了退化模型参数的估计算法和可靠性推断的公式,最后结合实例说明了方法的有效性。

**关键词** :航空航天; Normal-Poisson 过程; Bayes; 性能可靠性

**中图分类号** :TB114 **文献标识码** :A

## Reliability Evaluation Based on Normal-poisson Process on Condition of Small Sampling Test

ZHANG Yong-qiang<sup>1,2</sup>, LIU Qi<sup>1</sup>, ZHOU Jing-lun<sup>1</sup>

(1. College of Information System and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Beijing Institute of Tracking and Telecommunication Technology, Beijing 100094, China)

**Abstract** :Using degradation measurement of product performance over time to analyze product reliability is an effective approach for high-reliability or long-life products. Based on the performance degradation mechanism of aerospace product and the small sampling characteristic of field test, a model in terms of Normal-Poisson process is proposed. Then the calculation formula for parameter and reliability evaluation is presented through the small sampling test combined with Bayes method. Finally, an example is given to show the validity of this method.

**Key words** :aerospace; Normal-Poisson Process; Bayes; performance reliability

### 1 问题的提出

航天航空领域的一些关键设备,如卫星、动量轮、陀螺仪等,×××原型装置中的电容器等,由于具有造价昂贵、试验费用高等特点,根本无法投入大量产品进行寿命试验,而且由于产品本身属于高可靠性产品,在少量投试产品的可靠性试验中,无法得到足够的失效数据,甚至会出现“零失效”现象。此时运用传统可靠性分析方法进行产品的可靠性推断时,势必带来“可信度危机”。近些年来,很多学者致力于通过产品性能退化数据进行可靠性分析的理论 and 工程应用研究,取得了初步的成功,发表了相关的学术论文。1969年,Gertsbakh和Kordonskiy在研究材料磨损时,提出一个基于泊松过程的基本的随机过程性能退化模型<sup>[1]</sup>。1984年,Taylor和Karlin<sup>[2]</sup>以及1985年Bogdanoff和Kozin<sup>[3]</sup>等根据研究的实际问题,基于拓展的泊松过程建立了退化模型,1992年Kubat和Lam基于布朗运动过程<sup>[4]</sup>提出一个退化过程模型。江龙平<sup>[5]</sup>等基于性能退化研究转子系统可靠性,Durhan<sup>[6]</sup>提出累积损伤模型,Abdelmonem<sup>[7]</sup>提出估计性能退化通信网络影响的方法,Al-Shareef<sup>[8]</sup>研究了加速退化问题,Bagdonavicius<sup>[9-10]</sup>提出了性能数据和寿命数据一体化可靠性估计思想。

对于投试样本为小子样,性能退化量测量属于破坏性测量的产品(如对陀螺仪性能退化数据的测量需要将陀螺仪分解,甚至对某些部件的退化数据测量需要进行分割,数据测量后,该陀螺仪不能再用于试验),获取的性能退化数据为小子样数据。这种情况下应用极大似然估计、最小二乘估计等大样本方

\* 收稿日期:2005-12-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70571083)

作者简介:张永强(1975—),男,博士生。

法精度较低。事实上,此时虽然现场试验数据为小样本,但工程实际中,通常可以通过对类似产品、产品的制造材料等的分析得到性能参数的信息。此时如何合理地利用这些经验信息,结合少量的性能试验数据进行性能可靠性分析就是需要研究的问题。

Bayes 方法能结合总体信息、样本信息和各种验前信息,在小样本条件下,对产品的可靠性做出科学合理的统计推断,这已在国内外的工程实际中得到应用并且出版了大量的专著。本文在 Bayes 方法的基础上,对小子样条件下产品性能退化建模方法进行研究,给出基于 Normal-Poisson 过程的产品性能退化模型和基于 Bayes 方法的性能可靠性评定模型,最后给出一个实例说明该方法的有效性。

## 2 基于 Normal-Poisson 的性能退化模型

### 2.1 模型假设

在航空航天产品中,存在性能退化而导致失效的情况。以卫星为例,卫星在空间运行过程中会受到各种离子的辐射,每次辐射会对卫星产品中某些部件(如动量轮)的性能产生影响,使得性能参数发生一定量的退化,当性能参数退化到一定程度时,就会发生产品失效。基于实际系统中的这种情况,作如下的模型假设:

(1) 产品为退化失效型产品,产品的退化失效表现为某个性能参数(退化量)随时间推移而单调增加。记  $t$  时刻性能参数的取值为  $y(t)$ ,对应于  $y(t)$  的测量数据为退化数据,记为  $Z(t)$ ,测量误差为  $\epsilon(t)$ ,即  $Z(t) = y(t) + \epsilon(t)$ 。本文不考虑测量误差,则  $Z(t) = y(t)$ 。

(2) 产品工作时承受随机到来的冲击,假设在一个很小的时间间隔  $\Delta$  内,损伤事件发生的概率与某一常数  $\lambda$  成比例,并与已累积的损伤次数无关,即损伤的到达服从 Poisson 分布,则  $[0, t]$  时间之内有  $n$  次损伤的概率为

$$P\{k = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

(3) 冲击会造成产品性能参数(退化量)的增加,当退化量增至失效阈值时,产品即退化失效。各次冲击引起的退化量增量为一族独立同分布的随机变量  $\{S_k, k = 1, 2, \dots\}$ ,记  $S_k$  为第  $k$  次冲击造成的退化量增量,假设  $S_k \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,其中  $\mu$  表示单次损伤所造成的性能退化的期望值、 $\sigma^2$  表示损伤分布的方差,且  $S_k$  与  $n$  统计独立。

### 2.2 性能退化模型

由于制造误差等原因,在试验开始时刻,系统的性能参数  $y_0$  为服从正态分布  $N(a, \sigma_0^2)$  的随机变量。不失一般性,假设  $a = 0$ 。根据模型假设,损伤造成的产品退化量的累积量服从正态分布,即  $\sum_{i=1}^n S_i \sim N(n\mu, n^2\sigma^2)$ ,则  $n$  次损伤后系统退化量为服从正态分布  $N(n\mu, n^2\sigma^2 + \sigma_0^2)$  的随机变量。性能退化模型为

$$y(t) = y_0 + \sum_{k=1}^n S_k \quad (2)$$

则由式(2)可得,  $t$  时刻产品退化量的密度函数如下:

$$f_{y(t)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n^2\sigma^2 + \sigma_0^2)}} \exp\left[-\frac{(y - n\mu)^2}{2(n^2\sigma^2 + \sigma_0^2)}\right] \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) \quad (3)$$

当现场试验数据为大样本情况时,由经典的极大似然估计方法即可得到  $\lambda, \mu, \sigma^2$  的估计。对于高可靠性、长寿命要求的高科技产品而言,经常出现试验数据小样本情况,因此需要对小子样试验条件下的参数估计方法以及可靠性评定方法进行研究。

## 3 基于 Bayes 方法的参数估计

设通过对产品的性能测试数据进行分析,得到试验样本  $Y = (y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_m))$ ,则由式(3),可得似然函数为

$$L(Y | \lambda, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^m \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n^2\sigma^2 + \sigma_0^2)}} \exp\left\{-\frac{[y(t_i) - n\mu]^2}{2(n^2\sigma^2 + \sigma_0^2)}\right\} \frac{(\lambda t_i)^n}{n!} \exp(-\lambda t_i) \right\} \quad (4)$$

在现场试验之前,可通过专家信息、历史数据、类似系统的分析等途径得到未知参数  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  的先验信息,记未知参数的先验分布分别为  $\pi(\lambda)$ 、 $\pi(\mu)$ 、 $\pi(\sigma^2)$ 。由 Bayes 公式<sup>[11-12]</sup>可得未知参数的联合后验分布为

$$\pi(\lambda, \mu, \sigma^2 | Y) = \frac{\pi(\lambda)\pi(\mu)\pi(\sigma^2)L(Y | \lambda, \mu, \sigma^2)}{\iint_{\Xi \Theta \Lambda} \pi(\lambda)\pi(\mu)\pi(\sigma^2)L(Y | \lambda, \mu, \sigma^2) d\lambda d\mu d\sigma^2} \quad (5)$$

其中  $\Lambda$ 、 $\Theta$ 、 $\Xi$  分别表示  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  的取值范围。

由式(5)可得  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  的后验分布,分别为:

$$\pi(\lambda | Y) = \iint_{\Xi \Theta} \pi(\lambda, \mu, \sigma^2 | Y) d\mu d\sigma^2 \quad (6)$$

$$\pi(\mu | Y) = \iint_{\Xi \Lambda} \pi(\lambda, \mu, \sigma^2 | Y) d\lambda d\sigma^2 \quad (7)$$

$$\pi(\sigma^2 | Y) = \iint_{\Theta \Lambda} \pi(\lambda, \mu, \sigma^2 | Y) d\lambda d\mu \quad (8)$$

由式(6)~(8)所示的关于  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  的后验分布出发进行分析,即可得到关于  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  的后验估计、置信下限估计等。

#### 4 基于性能退化的可靠性评定

可靠性分析中关心的核心是可靠性点估计和置信下限估计。基于性能退化的可靠性研究中,将性能可靠性定义为产品在规定的工作条件下,规定的工作时间  $t$  内,其性能参数  $y(t)$  满足规定的允许限要求的概率,记为  $R(t)$ 。根据性能参数要求类型不同,性能可靠性可分别表示为:

(1) 单侧下限性能可靠性

$$R(t) = P\{y(t) \geq Y_L\} \quad (9)$$

(2) 单侧上限性能可靠性

$$R(t) = P\{y(t) \leq Y_U\} \quad (10)$$

(3) 双侧性能可靠性

$$R(t) = P\{Y_L \leq y(t) \leq Y_U\} \quad (11)$$

大多数情况下,产品的性能参数(特别是单元产品)随着使用时间的增加,性能不断退化,且退化过程不可逆。在本文中,我们对式(10)所表示的可靠性进行统计推断,对于式(9)、(11)所定义的可靠性可类似地进行分析。由式(10)可得:

$$R(t) = \int_{y(t) \leq Y_U} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n^2\sigma^2 + \sigma_0^2)}} \exp\left\{-\frac{[y(t) - n\mu]^2}{2(n^2\sigma^2 + \sigma_0^2)}\right\} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) d\lambda d\mu d\sigma^2 \quad (12)$$

从式(12)可知,系统可靠性  $R(t)$  是关于  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  的函数,并且服从某种分布。将  $R(t)$  记为  $R(t | \lambda, \mu, \sigma^2)$  表示在  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  给定之下  $R(t)$  的值。由于  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  是随机变量,且具有式(5)所示的后验分布,从而结合式(12)可得到  $R(t)$  的矩估计。 $R(t)$  的一、二阶矩估计分别如式(13)和(14)所示。

$$E[R(t)] = \iiint_{\Xi \Theta \Lambda} R(t | \lambda, \mu, \sigma^2) \pi(\lambda, \mu, \sigma^2 | Y) d\lambda d\mu d\sigma^2 \quad (13)$$

$$E[R^2(t)] = \iiint_{\Xi \Theta \Lambda} R^2(t | \lambda, \mu, \sigma^2) \pi(\lambda, \mu, \sigma^2 | Y) d\lambda d\mu d\sigma^2 \quad (14)$$

利用式(13)和(14)可以得到  $R(t)$  所服从的分布的期望和方差,分别记为  $\nu$ 、 $\tau^2$ ,即

$$\nu = E[R(t)], \quad \tau^2 = E[R^2(t)] - E^2[R(t)]$$

进一步假设  $R(t)$  服从 Beta 分布  $B(\alpha, \beta)$ ,则由矩等效法<sup>[13]</sup>可计算出超参数  $\alpha$ 、 $\beta$  的值。计算过程

如下:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \hat{R}_B(t), \quad \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} = \tau^2$$

联合上式求解得到:

$$\alpha = [\hat{R}_B(t)]^2 \left[ 1 - \hat{R}_B(t) - \tau^2 \frac{1}{\hat{R}_B(t)} \right] / \tau^2, \quad \beta = \frac{\alpha}{\hat{R}_B(t)} - \alpha \quad (15)$$

得到  $R(t)$  的分布  $B(\alpha, \beta)$  后,就可计算任意置信水平下可靠性的置信下限。

## 5 实例分析

以卫星为例,卫星在空间运行过程中会受到各种离子的辐射,要求对离子辐射所造成的动量轮的性能退化进行分析。

在计算过程中,假设单位时间(每年)内离子辐射的次数服从 Poisson 分布,由于离子的辐射使得动量轮的某项性能参数(如动量轮的振动参数、温度等)有所上升,每次辐射所造成的性能参数的变动服从正态分布,通过对三个样品性能退化的检测,得到如表 1 所示的性能退化结果。通过对空间离子辐射情况以及产品的分析,得到  $\lambda, \mu, \sigma^2$  的先验分布分别为 Gamma 分布  $G(10, 20)$ 、正态分布  $N(0.5, 0.004)$ 、逆 Gamma 分布  $IG(5, 100)$ 。假设  $\sigma_0^2 = 0.004$ ,性能参数的上限为 5。通过计算机编程计算得到式(13)、(14)所示的产品在任务时间 5 年的可靠性一阶矩和二阶矩分别为 0.90998、0.8291,从而可得方差的估计为  $1.0364 \times 10^{-3}$ 。由式(15)计算,可得  $\alpha = 71, \beta = 10$ ,经计算可得置信水平为 0.7 的置信下限估计为 0.8961。

若采用经典方法计算,三个样品的试验时间分别为 3、4、5 年,以成败型计算,可得在任务时间 3 年时,置信水平为 0.7 的可靠性置信下限为 0.67,在任务时间 5 年时,仅有一个样品的成功试验数据,从而可得置信水平为 0.7 的可靠性置信下限为 0.3。若进一步假设产品的寿命服从负指数分布,则 3、4、5 年作为定时截尾试验,经过计算可得系统任务时间 5 年的置信水平为 0.7 的可靠性置信下限为 0.3667。计算结果如表 2 所示。从计算结果可见两种经典的可靠性评定方法得到的结果较为保守,而本文提供的方法较为客观地反映了系统可靠性水平。

表 1 性能退化结果

Tab.1 The performance degradation result

样品编号	测试时间(年)	退化量
1	3	0.74
2	4	1.05
3	5	1.2

表 2 不同方法可靠性评定结果

Tab.2 The reliability evaluation result for different methods

方法	任务时间 5 年
基于 Bayes 的性能退化方法	0.8961
负指数分布方法	0.3667
成败型方法	0.3

## 6 说明

(1)本文中对于性能初始值的假设为  $y_0 \sim N(a, \sigma_0^2)$ ,并令  $a = 0$ 。事实上, $a \neq 0$  的情况与  $a = 0$  没有本质区别,只是退化曲线的平移而已。

(2)本文所提供的有关数据是通过计算机仿真得到的,在实际工程应用中,可结合系统的实际情况确定先验信息、现场试验数据等。

(3)本文提供的计算模型由于涉及到三重积分,因此存在计算上的困难,但由于本文所提供的方法

比较程式化,便于工程实现,所以借助于计算机编程可以较好地实现计算分析。

## 参考文献:

- [1] Gertsbakh I B, Kordonskiy K B. Models of Failure [ M ]. Springer-Verlag ,1969.
- [2] Taylor H M, Karlin S. An Introduction to Stochastic Modeling [ M ]. Academic Press ,1984.
- [3] Bogdanoff J L, Koziñ F. Probabilistic Models of Cumulative Damage [ M ]. John Wiley & Sons ,1985.
- [4] Kubat P, Lam C Y T. Optimal Monitoring Strategies for Slowly Deteriorating Repairable systems [ J ]. IEEE Transactions on Communications ,1992 , 40 :661 - 665.
- [5] 江龙平,等.系统退化法在转子系统可靠性评估中的应用 [ J ].机械强度 ,2002 ,24 :17 - 20.
- [6] Durham S D, Padgett W J. Cumulative Damage Models for System Failure with Application to Carbon Fibers and Composites [ J ]. Technometrics , 1997 ,39 :34 - 44.
- [7] Abdelmonem A H, Ryzin G J V. A Method for Evaluating the Effects of Performance Degradation on Communication Network Applications [ J ]. IEEE , 1990 :1307 - 1313.
- [8] Al-Shareef H, Dimos D. Accelerated Life-time Testing and Resistance Degradation of Thin-film Decoupling Capacitors [ J ]. IEEE ,1996 :421 - 425.
- [9] Bagdonavicius V, Bikelis A. Non-parametric Estimation from Simultaneous Degradation and Failure Time Data [ J ]. Statistica Sinica Ser. I ,2002 , 335 :183 - 188.
- [10] Bagdonavicius V, Nikulin M S. Estimation in Degradation Models with Explanatory Variables [ J ]. Lifetime Data Analysis ,2000 ,7 :85 - 103.
- [11] 张金槐,唐雪梅. Bayes 方法 [ M ]. 国防科技大学出版社 ,1990.
- [12] Berger O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis ( Second Edition ) [ M ]. Springer-Verlag New York Inc. ,1985.
- [13] 本书编写组. 现代数学手册. 随机数学卷 [ M ]. 武汉 :华中科技大学出版社 ,1999.

(上接第 115 页)

## 参考文献:

- [1] 陈启智. 液体火箭发动机故障检测与诊断研究的若干进展 [ J ]. 宇航学报 ,2003 ,24(1) :1 - 10.
- [2] Jue F, Kuck F. Space Shuttle Main Engine ( SSME ) Options for the Future Shuttle [ R ]. AIAA 2002 - 3758 ,2002.
- [3] Davidson M, Stephens J. Advanced Health Management System for the Space Shuttle Main Engine [ R ]. AIAA 2004 - 3912 ,2004.
- [4] Xie G J, Hu N Q, Wen X S, et al. Health Monitoring System of Turbopump [ R ]. AIAA 2005 - 3948 ,2005.
- [5] 谢光军,胡海峰,秦国军,等.液体火箭发动机涡轮泵健康监控系统 [ J ]. 国防科技大学学报 ,2005(3) :40 - 44.
- [6] 谢光军,胡葛庆,温熙森,等.涡轮泵实时故障检测的短数据均值自适应阈值算法 [ J ]. 推进技术 ,2005 ,26(3) :202 - 205.
- [7] 谢光军,李俭川,胡葛庆,等.涡轮泵实时故障检测的多特征参量自适应阈值综合决策算法 [ J ]. 中国机械工程 ,2005(13) :1184 - 1187.
- [8] 谢光军,胡葛庆,胡雷.涡轮泵实时故障检测的改进自适应相关阈值算法 [ J ]. 推进技术 ,已录用.
- [9] Xie G J, Hu N Q, Qin G J, et al. Features Selection and Bootstrap Threshold Estimation Algorithm for Turbopump Real-time Fault Detection [ A ]. 56th International Astronautical Congress [ C ], IAC - 05 - CA. P. 09 ,2005.
- [10] 胡雷. 涡轮泵试车数据分析及新异类状态检测技术研究 [ D ]. 长沙 :国防科技大学学位论文 ,2005.
- [11] Xie G J, Qiu Z, Qin G J, et al. Real-time Turbopump Health Monitoring System Based on Vibration Measurement [ A ]. In : WEN T. D. ed. ISTM/2005 [ C ], Beijing : International Academic Publishers/World Publishing Corporation ,2005 :2286 - 2290.
- [12] 张小龙. 涡轮泵转子系统的临界转速及次同步进动研究 [ D ]. 西安 :西北工业大学学位论文 ,2000.
- [13] 郑贇韬,田爱梅,王晓军. 基于 QZ 算法的涡轮泵转子临界转速有限元计算 [ J ]. 推进技术 ,2004 ,25(2) :114 - 117.
- [14] 王慧. 基于振动参量的涡轮泵健康状况判别方法的研究 [ D ]. 北京 :中国航天科技集团公司 ,2003.
- [15] 应桂炉,王梦魁. 氢涡轮泵转子非线性振动 [ J ]. 强度与环境 ,1994(1) :1 - 7.
- [16] 应桂炉,万黎明. 氢涡轮泵转子轴向振动 [ J ]. 强度与环境 ,1994(3) :16 - 22 ,37.
- [17] 刘刚,曲梁生. 应用 Bootstrap 方法构造机械故障特征库 [ J ]. 振动工程学报 ,2002 ,15(1) :106 - 110.



