文章编号:1001-2486(2006)04-0022-05

椭圆轨道上空间飞行器的编队飞行轨道设计*

罗　成,高大远,沈　辉,胡德文

(国防科技大学 机电工程与自动化学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:针对椭圆轨道上空间飞行器的编队飞行,基于开普勒轨道方程推导了一组新的相对运动方程,该方程组采用轨道要素表示,可直接用于编队的轨道设计。分析了一些典型的相对运动轨迹及编队轨道的精度,在此基础上,设计了线性编队和垂直圆编队。仿真结果验证了这种方法是有效的。

关键词:编队飞行;椭圆轨道;轨道设计

中图分类号:V488　　**文献标识码**:A

Orbit Design for Spacecraft Formation Flying in Eccentric Orbits

LUO Cheng,GAO Da-yuan,SHEN hui,HU De-wen

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract:Based on the Kepler's equation, a new set of relative motion equations with elliptical reference orbits were derived. The equations are expressed by orbit elements, and can be used directly for formation flying orbit design. Several typical relative motions and the precision of the equations were analyzed. Furthermore, a linear formation and a perpendicular circles formation were suggested. The effectiveness was verified by the simulation results.

Key words:formation flying; eccentric orbits; orbit design

空间飞行器的编队飞行已成为近年来航天领域研究的热点之一[1-4]。从理论上讲,多个空间飞行器可以根据需要设计任意的编队构形,但是在实际中由于空间飞行器所携带燃料有限,一般只能选择那些基本不消耗能量、可以被动稳定的构形[1]。因此,有必要研究编队构形参数与各个空间飞行器轨道要素之间的关系。

在有关研究编队构形的文献中,有相当一部分是针对圆或近圆轨道上的编队构形。林[1]以 Hill 方程为基础,研究了圆和近圆轨道上多种稳定的编队构形与初始相对运动位置、速度的关系;Sabol[2]基于 Hill 方程研究了几种典型的编队构形设计方法;陈[3]直接基于开普勒方程,利用坐标投影研究了参考卫星为圆形轨道,伴随卫星为圆和近圆轨道的 SAR 卫星编队的轨道设计方法。还有一部分则是针对椭圆轨道上的编队构形。这时的相对运动动力学方程要复杂得多,一般将其转换成关于真近角的偏微方程,再通过复杂的积分运算得到相对运动方程[4-5]。由于这些运动方程与初始的相对运动位置、速度有关,不便于用来进行轨道设计。Zhang[6]将椭圆轨道上的相对运动方程与轨道要素联系起来,但是没有考虑升交点赤经增量的影响。

本文直接利用开普勒方程,采用坐标投影的方法推导出编队空间飞行器的相对运动方程。该方程包含了所有轨道要素的影响,可以直接用来进行椭圆轨道上编队构形的轨道设计。实际上,Zhang[6]推导的相对运动方程是本文推导的相对运动方程在 $\Delta\Omega=0$ 时的特例。基于数值仿真分析了一些典型的相对运动轨迹,并设计出两种独特编队构形。

1　相对运动方程

假设参考空间飞行器 S 的轨道要素为$(a, e, i, \omega, \Omega, \theta_0)$,第 k 颗伴随空间飞行器 S_k 的轨道要素为

* 收稿日期:2006-03-02
基金项目:国家杰出青年科学基金资助项目(60225015);高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目
作者简介:罗成(1973—),男,博士生。

$(a_k, e_k, i_k, \omega_k, \Omega_k, \theta_{k0})$。并且 $a_k = a, e_k = e + \Delta e_k, i_k = i + \Delta i_k, \omega_k = \omega + \Delta\omega_k, \Omega_k = \Omega + \Delta\Omega_k, \theta_{k0} = \theta_0 + \Delta\theta_{k0}$。

在赤道惯性坐标系 $OXYZ$ 中(图1),伴随空间飞行器与参考飞行器的相对位置矢量 $\Delta \boldsymbol{r}_k$ 为[3]

$$r_k\begin{bmatrix}\cos\Omega_k\cos u_k - \sin\Omega_k\sin u_k\cos i_k \\ \sin\Omega_k\cos u_k + \cos\Omega_k\sin u_k\cos i_k \\ \sin u_k\sin i_k\end{bmatrix} - r\begin{bmatrix}\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i \\ \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i \\ \sin u\sin i\end{bmatrix} \tag{1}$$

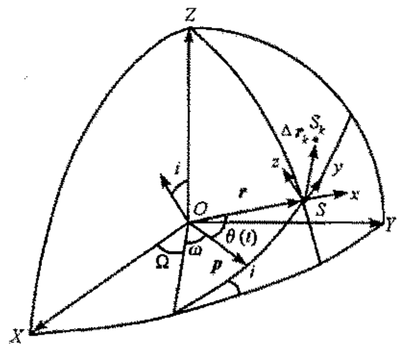

图1　空间飞行器的轨道要素及坐标关系

Fig.1　Orbit elements and the relative coordinate system

其中:u、u_k 分别表示参考空间飞行器和伴随飞行器的升交点角距,并且

$$u_k = \omega_k + \theta_k(t) = u + \Delta u_k,$$
$$\Delta u_k = \Delta\omega_k + \theta_k(t) - \theta(t) = \Delta\omega_k + \Delta\theta_k(t) \tag{2}$$

为了描述空间飞行器的相对运动,首先建立以参考飞行器为坐标原点的相对坐标系,该坐标系的 x 轴沿径向背离地心,y 轴为运动方向,z 轴垂直轨道平面并满足右手法则(图1)。令 e_x、e_y 和 e_z 分别表示相对坐标系中 x 轴、y 轴和 z 轴的单位矢量,则它们在赤道惯性坐标系中为[3]

$$\begin{cases} e_x = [\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i \quad \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i \quad \sin u\sin i]^{\mathrm{T}} \\ e_y = [-\cos\Omega\sin u - \sin\Omega\cos u\cos i \quad -\sin\Omega\sin u + \cos\Omega\cos u\cos i \quad \cos u\sin i]^{\mathrm{T}} \\ e_z = [\sin\Omega\sin i \quad \cos\Omega\sin i \quad \cos i]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{3}$$

在相对坐标系中,精确的相对运动方程为

$$\begin{cases} x(t) = \Delta\boldsymbol{r}_k \cdot e_x \\ y(t) = \Delta\boldsymbol{r}_k \cdot e_y \\ z(t) = \Delta\boldsymbol{r}_k \cdot e_z \end{cases} \tag{4}$$

直接用(4)式来分析空间飞行器的相对运动是很困难的,必须对它进行简化。对于近距离的编队构形,有如下假设:

(1) Δi_k、$\Delta\omega_k$、$\Delta\Omega_k$ 是小量。

(2) 真近点角 $\theta(t)$ 与偏心率 e、初始值 θ_0、时间 t 有关,当 $a = a_k$ 并且 Δe_k、$\Delta\theta_{k0}$ 是小量时,$\Delta\theta_k(t)$、Δu_k 也是一个小量。

忽略(4)式中所有关于 Δi_k、Δu_k、$\Delta\Omega_k$ 的高阶项的影响,得到相对运动方程:

$$\begin{cases} x(t) = r_k(t) - r(t) \\ y(t) = r_k(t)[\Delta\Omega_k\cos i + \Delta u_k] \\ z(t) = r_k(t)[\Delta i_k\sin u - \Delta\Omega_k\sin i\cos u] \end{cases} \tag{5}$$

为了利用(5)进行编队的轨道设计,还需要将 $r_k(t)$ 和 Δu_k 与轨道要素和运动时间 t 或真近点角 $\theta(t)$ 联系起来。考虑到 $r_k(t)$、Δu_k 与真近点角 $\theta(t)$ 的关系比较简单,这里用 $\theta(t)$ 来代替运动时间 t。

注意到
$$r_k(t) = \frac{a(1-e_k^2)}{1+e_k\cos\theta_k} = \frac{a[1-(e+\Delta e_k)^2]}{1+(e+\Delta e_k)\cos(\theta+\Delta\theta_k)}$$

取泰勒展开一阶近似得

$$r_k(t) \approx r(t) - \frac{2ae(1+e\cos\theta) + a(1-e^2)\cos\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\Delta e_k + \frac{ae(1-e^2)\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\Delta\theta_k(t) \tag{6}$$

利用 Kepler 方程可将 $\Delta\theta_k(t)$ 表示成 $\theta(t)$ 和轨道要素的函数[6]:

$$\Delta\theta_k(t) \approx \frac{\sin\theta(2+e\cos\theta)}{1-e^2}\Delta e_k + \frac{n(1+e\cos\theta)^2}{(\sqrt{1-e^2})^3}\Delta t_k \tag{7}$$

其中：n 为参考卫星的平均角速度，Δt_k 表示起始位置的时间差。

$$\Delta t_k = \frac{1}{n}\left(\arcsin\frac{\sqrt{1-e_k^2}\sin\theta_{k0}}{1+e_k\cos\theta_{k0}} - \frac{e_k\sqrt{1-e_k^2}\sin\theta_{k0}}{1+e_k\cos\theta_{k0}} - \arcsin\frac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta_0}{1+e\cos\theta_0} + \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta_0}{1+e\cos\theta_0}\right) \tag{8}$$

最后将(7)、(6)式代入(5)式，并且忽略所有关于 Δi_k、Δu_k、$\Delta\Omega_k$、Δe_k、Δt_k 的高阶项的影响，得到关于 $\theta(t)$ 和轨道要素的相对运动方程：

$$\begin{cases} x = \sqrt{(a\Delta e_k)^2 + \left(\frac{ane\Delta t_k}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2}\sin(\theta+\alpha_k) \\ y = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\left[\Delta\Omega_k\cos i + \Delta\omega_k + \frac{\Delta e_k}{1-e^2}\sin\theta(2+e\cos\theta)\right] + \frac{an\Delta t_k}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{ane\Delta t_k}{\sqrt{1-e^2}}\cos\theta \\ z = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\sqrt{\Delta i_k^2 + (\Delta\Omega_k\sin i)^2}\sin(\theta+\omega+\beta_k) \end{cases} \tag{9}$$

其中：$\alpha_k = \arctan\left(\frac{-\Delta e_k\sqrt{1-e^2}}{ne\Delta t_k}\right)$，$\beta_k = \arctan\left(\frac{-\Delta\Omega_k\sin i}{\Delta i_k}\right)$

文献[5]基于椭圆轨道上的相对运动动力学方程，经过复杂的积分运算得到了用初始状态表示的相对运动方程，它与(9)式相比两者是等价，这验证了本文的推导是正确的。

从推导的过程来看，用坐标投影的方法无需作复杂的积分运算，非常简单。从推导的结果来看，方程(9)采用轨道要素来描述椭圆轨道上的相对运动轨迹，物理意义清晰、直观，并且可以直接用来进行编队构形的轨道设计。与文献[6]所描述的相对运动方程相比，该方程包含了轨道的升交点角增量的影响，因而更加全面。实际上，如果令 $\Delta\Omega_k = 0$ 时，方程(9)就可以化成文献[6]所得到的相对运动方程。采用积分方法推导相对运动方程时，为了使得相对运动形成封闭的曲线，初始相对运动的位置和速度必须满足一个周期性条件[5]：

$$x(\theta_0) + (1+e\cos\theta_0)[\dot{y}(\theta_0) + x(\theta_0)] + e\sin\theta_0[\dot{x}(\theta_0) - y(\theta_0)] = 0 \tag{10}$$

而(9)式中包含真近点角的项不是正弦函数就是余弦函数，都是周期性变化的，相对运动轨迹似乎无条件地形成了一条封闭的曲线。之所以出现这种“差异”，是因为在本文的推导过程中，暗含了参考空间飞行器与伴随飞行器的运行轨道具有相同的长半轴，两空间飞行器的轨道运动周期相同，如此经过一个运动周期以后，它们的相对位置又回到了初始状态。这说明周期性条件(10)的实质就是要满足两个空间飞行器的运行轨道长半轴相等，即具有相同的运动周期。由于圆可以视为椭圆的特例，因此，该方程同样可以用来描述圆或近圆轨道上的相对运动。在实际的轨道设计中，纯圆轨道不容易保持，一般采用近圆轨道，这时采用方程(9)的精度将更高。

2 典型的相对运动形式

由方程(9)可以看出，相对运动轨迹与 Δe_k、Δi_k、$\Delta\omega_k$、$\Delta\Omega_k$，Δt_k 密切相关。下面通过精心选择上述参数的数值，得到一些典型的相对运动曲线(用实线表示)。仿真时，取 $a = 10\,000\text{km}$，$e = 0.3$，$i = 60$。

情形 1：$\Delta e_k = \Delta t_k = 0$，$\Delta\Omega_k\cos i + \Delta\omega_k \neq 0$，

此时，相对运动轨迹是基本上限定在 yz 平面内的椭圆。特别地，当 $\omega + \beta_k = 0$ 并且 $|\Delta\Omega_k\cos i + \Delta\omega_k| = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sqrt{\Delta i_k^2 + (\Delta\Omega_k\sin i)^2}$ 时，在 yz 平面内是一个圆心为 $(a\Delta\Omega_k, \cos i + a\Delta\omega_k, 0)$，半径为 $ae|\Delta\Omega_k\cos i + \Delta\omega_k|$ 的圆(图 2(a))；当 $\Delta i_k^2 + (\Delta\Omega_k\sin i)^2 = 0$ 时，相对运动轨迹仅在 y 轴上振动(图 2(b))。

情形 2：$\Delta e_k = 0$，$\Delta\Omega_k\cos i + \Delta\omega_k = 0$，$\Delta t_k \neq 0$

此时，相对运动轨迹在 xy 平面内是一个以 $\left(0, \frac{an\Delta t_k}{\sqrt{1-e^2}}\right)$ 为圆心，半径为 $\frac{ane\Delta t_k}{\sqrt{1-e^2}}$ 的圆。特别地，当 $\Delta i_k^2 + (\Delta\Omega_k\sin i)^2 = 0$ 时，相对运动轨迹仅限于 xy 平面(图 2(c))。

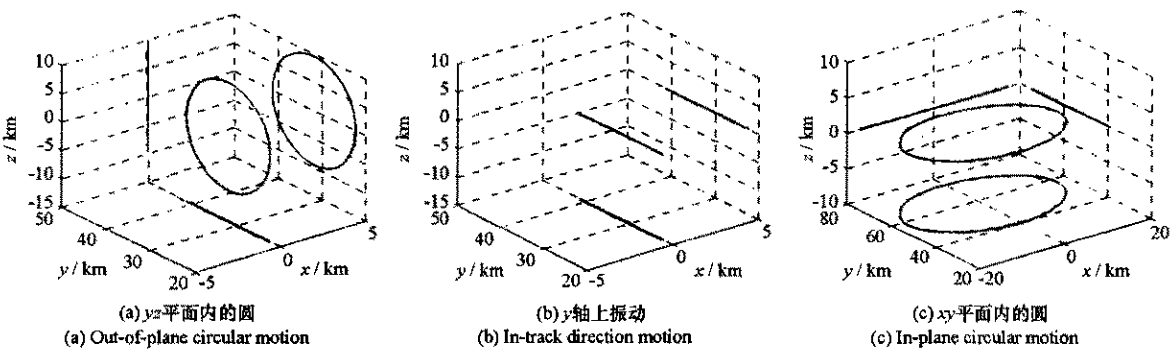

图 2　几种典型的相对运动曲线及其投影
(虚线表示实际的相对运动曲线,实际表示由(9)式得到的相对运动曲线)
Fig.2　Typical relative motions and their projections
(The dashed denotes the actual relative motion and the solid denotes the motion resulting from formula (9))

此外还有其他更复杂的相对运动曲线,这里就不一一列举。有必要说明的是,这些相对运动曲线基于文献[5 - 6]同样可以得到,但是导出形成这些曲线的条件是不同的。文献[5]是基于初始状态约束条件,不便于用来进行编队轨道设计。文献[6]是基于轨道要素,但是没有考虑到 $\Delta\Omega_k$ 的影响,例如为了形成仅限于 xy 平面内的相对运动轨迹,文献[6]必须要求 $\Delta i_k = \Delta\Omega_k = 0$,而基于(9)式则只要满足 $\Delta i_k^2 + (\Delta\Omega_k \sin i)^2 = 0$ 即可。也就是说,基于(9)式来设计编队构型可以更加灵活。

在推导(9)式过程来看,只是忽略了 Δe_k、Δi_k、$\Delta\omega_k$、$\Delta\Omega_k$、$n\Delta t_k$ 等有关小量的高阶项的影响,在编队距离不超过数十千米的情况下,这些小量一般为 $10^{-2} \sim 10^{-3}$,由其高阶项引起的相对误差约为 1% ~ 0.1%。综合起来,多项误差相互叠加,其数值会有所变化,但其量级基本不变。在仿真时用虚线给出了实际的相对运动曲线,可以看出它们确实基本上是吻合的。

3　编队构形设计

椭圆轨道上的相对运动轨迹尽管形式多种多样,但是都不以原点为对称点。因而,不可能像近圆轨道上的编队构形那样,将多个伴随空间飞行器安排在同一条相对运动轨迹上[3](否则编队飞行器将发生碰撞)。但是可以通过精心选择不同的相对运动轨迹,来得到各式各样的编队构形。

(1)线性编队

当各颗伴随空间飞行器对参考空间飞行器的相对运动仅限于 yz 平面上时(情形 1),有

$$\frac{z_k}{y_k} = \frac{\sqrt{\Delta i_k^2 + (\Delta\Omega_k \sin i)^2}}{\Delta\Omega_k \cos i + \Delta\omega_k}\sin(\theta + \omega + \beta_k)\ (\Delta\Omega_k \cos i + \Delta\omega_k \neq 0,\ k = 1,\cdots,m) \tag{11}$$

选择合适的 Δi_k、$\Delta\omega_k$、$\Delta\Omega_k$,使得

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\Delta i_1^2 + (\Delta\Omega_1 \sin i)^2}}{\Delta\Omega_1 \cos i + \Delta\omega_1} = \cdots = \dfrac{\sqrt{\Delta i_m^2 + (\Delta\Omega_m \sin i)^2}}{\Delta\Omega_m \cos i + \Delta\omega_m} = \rho \\ \beta_1 = \cdots = \beta_m = \beta \end{cases} \tag{12}$$

此时,所有 m 颗伴随空间飞行器以及参考飞行器就形成了线性编队。

特别地,当 $\rho = 0$,$\Delta\omega_{k+1} - \Delta\omega_k = \Delta\omega_1\ (k = 1,2,\cdots,m-1)$ 时,整个编队仅限于 y 轴,并且相邻飞行器之间的距离都等于 $\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}|\Delta\omega_1|$(图 3)。当 $\rho = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}$,$\beta = -\omega$ 时,各颗伴随空间飞行器的相对运动轨道为圆,整个编队则成一条以 y 轴为对称轴,最大摆动角度为 $\arctan\rho$ 的直线;进一步地,如果 $\Delta\omega_{k+1} - \Delta\omega_k = \Delta\omega_1$,$\Delta i_{k+1} - \Delta i_k = \Delta i_1$,$\Delta\Omega_{k+1} - \Delta\Omega_k = \Delta\Omega_1$,则编队中各相邻飞行器的距离相等(图 4)。

(2)垂直圆编队

如前所叙,有两种情形可以形成纯圆的相对运动轨迹(图 2(a)、2(c)),此时如果

$$\Delta\Omega_k \cos i + \Delta\omega_k = \frac{n\Delta t_k}{\sqrt{1-e^2}} \tag{13}$$

则在三维空间内,这两个圆具有相同的圆心$\left(0,\frac{an\Delta t_k}{\sqrt{1-e^2}},0\right)$、相等的半径$\frac{ane\Delta t_k}{\sqrt{1-e^2}}$,并且两圆所处的平面相互垂直(图 5)。需要注意的是:这两条圆轨迹有两个交点,但是编队飞行器经过这两点的时刻不同,因此不会出现碰撞。

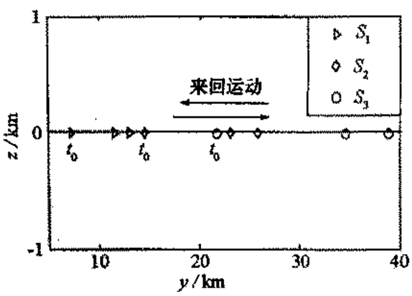

图 3 y 轴上的线性编队
Fig.3 In-track linear formation

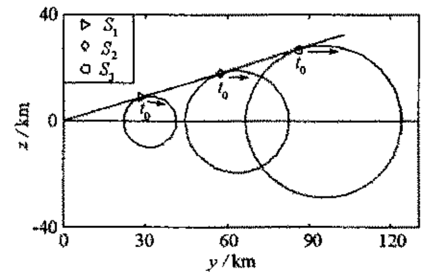

图 4 yz 平面内的线性编队
Fig.4 Out-of-plane linear formation

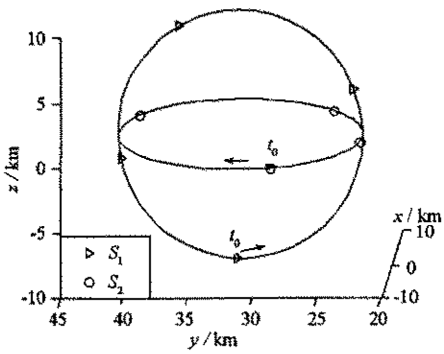

图 5 垂直圆编队
Fig.5 Perpendicular circles formation

4 结 论

本文基于开普勒方程推导出椭圆轨道上的相对运动方程。这种方法运算简单,几何意义清晰。所得结果采用轨道要素和真近点角 θ 表示,在形式上与采用初始相对位置和速度表示的相对运动方程非常类似。该方程由于考虑了升交点赤经增量的影响,在设计椭圆轨道上的编队构形时更加灵活。解析了用积分方法推导相对运动方程时周期性条件的物理意义,即参考飞行器与伴随飞行器的轨道运动周期要相同。最后,对所得的相对运动方程进行了分析,结合数值仿真,探讨了一些典型的相对运动轨迹,并设计出两种典型的编队构形。

参 考 文 献:

[1] 林来兴. 小卫星编队飞行及其轨道构成[J]. 中国空间科学技术,2001(2):23-28.

[2] Sabol C, Burns R, McLaughlin C A. Formation Flying Design and Evolution. AAS 99-121, Space Flight Mechanics 99, Vol.102 of Advances in the Astronautical Sciences, 1999,265-285.

[3] 陈杰,周荫清,李春升. 分布式 SAR 小卫星编队轨道设计方法研究[J]. 中国科学,2004,34(6):654-662.

[4] Inalhan G, Tillerson M, How J P. Relative Dynamics and Control of Spacecraft Formation in Eccentric Orbits[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2002,25(1):48-59.

[5] Shan J J, Liu H T. Dynamics and Fuzzy Control for Formation Flying with Elliptical Reference Orbits[A]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 16-19 Aug 2004,Providence, Rhode Island, AIAA 2004-5025.

[6] Zhang H, Sun L. Spacecraft Formation-Flying in Eccentric Orbits[A]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 11-14 Aug 2003, Austin, Texas AIAA 2003-5589.