

## 飞行器碰撞概率计算的一般方法\*

王 华,李海阳,唐国金

(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:研究了飞行器碰撞概率计算的一般方法,这种方法通过飞行器和空间物体各自的状态矢量、位置误差协方差矩阵以及形状尺寸来计算飞行器和空间物体的碰撞概率。从位置误差协方差矩阵的一般形式出发,推导了飞行器的碰撞概率计算公式。在推导过程中,将飞行器的相对运动速度看作是方向不变的矢量,从而可以消去平行于相对速度的一维,将三维的概率计算问题转化为和相对速度垂直的相遇平面内的二维概率问题。针对二维概率问题分别研究了三种碰撞概率的计算方法,并比较了它们各自的优缺点。最后通过数值算例验证了三种方法各自的特点及正确性。

关键词:飞行器;碰撞;概率;协方差矩阵

中图分类号:V526 文献标识码:A

## General Method for Calculating Spacecraft Collision Probability

WANG Hua, LI Hai-yang, TANG Guo-jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** A general method for calculating spacecraft collision probability is developed. In this method the input required to perform a calculation includes the respective state vectors, position error covariance matrices and physical sizes of objects involved. The method is valid for the general case because it only relies on the general form of error covariance matrices. The relative velocity is assumed to be vector having constant direction, and then the collision probability problem can be reduced to two dimensions in encounter plane normal to the relative velocity vector by eliminating the dimension parallel to the relative velocity vector. Three kinds of method resolving the two dimensions problem are developed and compared. Test case results indicate the method is valid and applicable.

**Key words** spacecraft; collision; probability; covariance matrix

随着太空中人造卫星与空间碎片数量的不断增加,评估飞行器与其它空间飞行器或空间碎片碰撞的可能性成为了飞行器飞行中必须考虑的问题。过去通常的方法是给定包围飞行器的一个危险包围体(例如,美国航天飞机的危险包围体尺寸为 $5 \times 2 \times 2 \text{ km}^{[1-2]}$ )然后通过判断危险包围体是否相交来确定碰撞的可能性。这种方法不能够定量地给出飞行器碰撞的危险性,而且也不便于得到最优的碰撞规避机动策略,因此很多学者针对飞行器碰撞概率的定量计算进行了一系列的研究工作。

碰撞概率通常是两个飞行器各自的位置和速度信息以及位置误差的协方差矩阵来计算的。Char<sup>[3]</sup>证明了如果两个飞行器误差的协方差矩阵不相关,那么它们的和就是相对位置误差的协方差矩阵,于是碰撞概率计算就变成了一个三维的概率分布问题。当两个飞行器相距较近时,它们的相对速度可以看作是常量,定义垂直相对速度矢量的平面为相遇平面,那么就可以将三维概率分布问题简化为相遇平面上的二维概率问题<sup>[1-5]</sup>。Patera<sup>[1]</sup>将二维积分问题转化为一维曲线积分问题,这一转化使得计算不规则形状飞行器之间的碰撞概率变得更加方便。Patera<sup>[5]</sup>采用这种方法计算了卫星和空间绳系卫星之间的碰撞概率。Patera<sup>[6]</sup>研究了弱非线性相对运动情况下的碰撞概率计算问题。

本文从飞行器位置误差协方差矩阵的最一般形式出发,将三维概率问题转化为二维概率问题后,采用三种不同的方法计算飞行器的碰撞概率,并分别讨论了三种方法的优缺点,从而得到了飞行器碰撞概率的一般计算方法。本文的方法适用于任意两个空间物体之间(包括飞行器之间或飞行器与空间碎片

\* 收稿日期:2005-12-28  
作者简介:王华(1977-),男,博士生。

之间)的碰撞概率计算。最后的数值算例验证了本文方法的正确性。

## 1 碰撞概率计算思想

由于空间飞行器的速度很快,其相遇时间非常短,所以可以有如下假设:

1)两个飞行器相遇期间的的时间非常短,其相对运动可以简化为线性模型。

2)由于速度误差非常小,所以在相遇期间速度可以看作是不变恒量。

3)相遇期间两个飞行器的位置误差可以用三维 Gauss 分布来描述,并且在整个相遇期间内位置误差保持不变。

将两个飞行器位置误差的协方差矩阵转换到同一个坐标系中,然后相加就得到了两个飞行器相对位置误差的协方差矩阵。可以将相对位置误差的协方差矩阵全部分配给其中一个飞行器,于是这个飞行器就包含了所有的随机因素,称这个飞行器为随机飞行器,而称另一个不包含随机因素的飞行器为参考飞行器。

把飞行器的形状考虑成一个球体,这可以通过包围飞行器的一个包围球来实现。两个飞行器的两个包围球可以结合成一个总包围球,这个总包围球的半径等于两个小包围球半径之和,球心在参考飞行器中心。这样,如果两个飞行器的距离小于总包围球的半径,就表明两个飞行器发生了碰撞。

## 2 碰撞概率计算方法

给定两个飞行器(随机飞行器和参考飞行器,分别用下标  $S$  和  $R$  代表)在各自轨道坐标系中的位置误差分布的协方差矩阵  $C_S$  和  $C_R$ ,根据两个飞行器各自的位置参数可以得到两个轨道系到惯性系(或某个给定的参考系)的转换矩阵为  $P_S$  和  $P_R$ ,那么可以得到惯性系中的两个协方差矩阵为<sup>[6]</sup>

$$C_{Sl} = P_S C_S P_S^{-1} \quad (1)$$

$$C_{Rl} = P_R C_R P_R^{-1} \quad (2)$$

由于两个飞行器的位置误差分布不相关,于是可以得到相对位置误差的协方差矩阵为

$$C_l = C_{Sl} + C_{Rl} \quad (3)$$

根据两个飞行器的位置  $r_S, r_R$  和速度  $v_S, v_R$ ,可得到相对位置和相对速度如下:

$$X = r_S - r_R \quad (4)$$

$$V = v_S - v_R \quad (5)$$

定义相遇平面坐标系的原点在参考飞行器质心,  $z$  轴和相对速度矢量平行,其它两轴垂直于相对速度,成右手坐标系。从惯性系到相遇平面坐标系的转换矩阵为  $U$ ,那么可将相对位置  $X$  和相对位置的协方差矩阵转换到相遇平面坐标系中

$$X_e = UX \quad (6)$$

$$C_e = UC_l U^{-1} \quad (7)$$

于是得到相遇平面坐标系中表示的相对位置误差的三维 Gauss 分布概率密度函数

$$p(X_e) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |C_e|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} X_e^T C_e^{-1} X_e\right] \quad (8)$$

这里  $|C_e|$  表示协方差矩阵  $C_e$  的行列式的值。

将  $C_e^{-1}$  写成分量形式

$$C_e^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

由于  $C_e^{-1}$  是对称矩阵,所以在上式中有  $c_{ij} = c_{ji} (i \neq j)$ 。

将总包围球投影到和相对速度垂直的相遇平面上,如图 1,图中的虚线所示就是概率密度函数的高线,概率分布的中心在坐标系原点上(即随机飞行器的质心),  $q$  表示总包围球投影的圆心矢量,它是

相对位置矢量  $X$  在相遇平面上的投影矢量。

将三维 Gauss 分布沿相对速度方向(即相遇平面坐标系的  $z$  轴方向)积分后,就得到如下的二维概率密度函数

$$h(x, y) = \frac{1}{2^{3/2} \pi |C_e|^{1/2} a^{1/2}} \exp[-ex^2 - fy^2 - gxy] \quad (10)$$

其中:

$$a = \frac{c_{33}}{2}, e = \frac{c_{11}}{2} - \frac{c_{13}^2}{2c_{33}}, f = \frac{c_{22}}{2} - \frac{c_{23}^2}{2c_{33}}, g = c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}} \quad (11)$$

如果总包围球投影内的概率密度函数变化很小,那么可以将投影内概率密度函数的值看作和圆心处的概率密度  $h_0$  相等,于是得到飞行器碰撞概率为

$$P = \pi r^2 h_0 \quad (12)$$

式中  $r$  表示总包围球投影的半径,它等于总包围球的半径。

上述方法具有一定的近似性,更精确的方法是直接对投影区域进行二维积分得到碰撞概率

$$P = \iint h(x, y) dx dy \quad (13)$$

在实际计算中,上述二维积分的结果可以通过数值积分方便地得到,但是对于形状极不规则的空间物体,包围体的投影不是圆形,给数值积分带来了许多不便。下面推导一组采用曲线积分来代替二维积分的公式以方便火箭等不规则形状空间物体的碰撞概率计算,这组公式的最后结果实质上 and Patera<sup>[1]</sup> 所得到的公式是等价的。

通过坐标旋转消去式(10)中的交叉项  $gxy$ ,得到

$$h = \frac{1}{2^{3/2} \pi |C_e|^{1/2} a^{1/2}} \exp[-\alpha x^2 - \beta y^2] \quad (14)$$

这里,系数  $\alpha$  和  $\beta$  以及转换矩阵  $T$  的求解可以通过数值求解特征值和单位特征向量的方法,也可以采用下面的公式直接计算:

$$\alpha = (e + f - b)/2, \beta = (e + f + b)/2, b = \sqrt{g^2 + (f - e)^2} \quad (15)$$

坐标转换矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} \frac{-e+f+b}{g\sqrt{1+(e-f+b)^2/g^2}} & \frac{e-f+b}{g\sqrt{1+(e-f+b)^2/g^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+(e-f+b)^2/g^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(e-f+b)^2/g^2}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

对式(14)中的  $y$  进行如下变换,然后将变换后的式子代入式(13),并将直角坐标转换成极坐标表示得到

$$P = \frac{\sqrt{\alpha}}{2^{3/2} \pi |C_e|^{1/2} \sqrt{\alpha\beta}} \iint \exp(-ar^2) r dr d\theta \quad (17)$$

这里的积分域为经过变换后的总包围球投影,形状是一个椭圆,如图2所示。

在相遇平面内的新的相对位置可以如下计算

$$q_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta/\alpha} \end{pmatrix} T q \quad (18)$$

对式(17)中的  $r$  积分得到

$$P = \frac{1}{2^{5/2} \pi \sqrt{|C_e| \alpha \beta}} \int \{ \exp[-ar_2(\theta)^2] - \exp[-ar_1(\theta)^2] \} d\theta \quad (19)$$

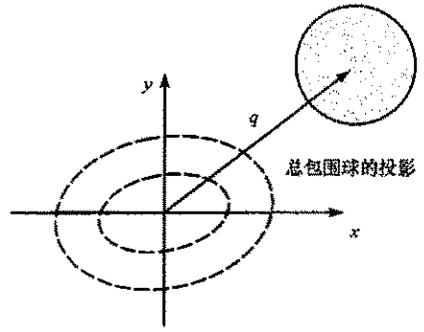


图1 相遇平面内的概率分布和包围球的投影  
Fig.1 Collision probability density and projection of combined envelope sphere in the encounter plane

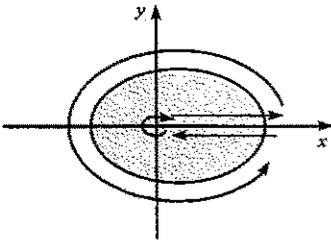


图2 总包围球的投影包含原点的情形  
Fig.2 The case in which the origin lies within the projection of combined envelop sphere

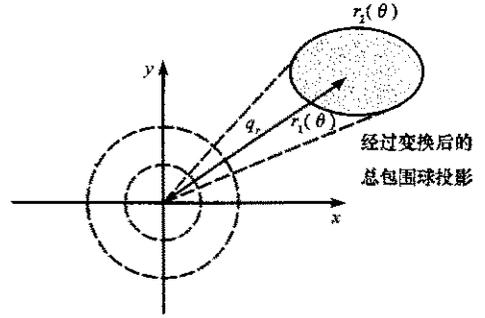


图3 经过变换后的概率分布和总包围球的投影  
Fig.3 Collision probability density and projection of combined envelop sphere transformed

这里  $r_2(\theta)$  和  $r_1(\theta)$  表示经过变换后的总包围球投影的两条边的方程,如图3。  
式(19)等价于如下曲线积分

$$P = \frac{-1}{2^{5/2}\pi \sqrt{|C_e|} \alpha \beta} \oint \exp[-\alpha r(\theta)^2] d\theta \tag{20}$$

这里的积分是对经过变换后的总包围球投影的环向积分。

消去式(20)的系数,于是得到采用曲线积分计算碰撞概率的公式(21)。如果总包围球的投影包含了原点在內,那么式(20)的积分曲线就要包含围绕原点的的一个无限小的圆,如图2所示。这时的碰撞概率计算应该采用式(22)进行。

$$P = \frac{-1}{2\pi} \oint \exp[-\alpha r(\theta)^2] d\theta \tag{21}$$

$$P = 1 - \frac{1}{2\pi} \oint \exp[-\alpha r(\theta)^2] d\theta \tag{22}$$

式(12)、式(13)、式(21)或式(22)代表的就是三种典型的空空间物体碰撞概率计算方法。在实际计算中发现,如果总包围球的投影正好和原点相交,那么曲线积分方法难于得到正确的结果,这时建议采用其它两种方法计算。

### 3 数值算例

采用上面的计算方法对运载火箭和空间物体的碰撞概率进行计算。分别将火箭考虑成球体和圆柱体。球体火箭的包围球半径取为60m;圆柱体火箭的长度取为120m,截面半径取为5m,它在相遇平面内的投影取为120×10m的矩形。

针对球体火箭,采用三种方法计算火箭和其它空间物体的碰撞概率。第一种方法采用式(12)表示的中心概率密度乘面积方法;第二种方法采用式(13)表示的二维数值积分方法;第三种方法采用式(21)或(22)表示的曲线积分方法。计算结果如表1所示。三种方法各执行10 000次所花费的时间如图4所示,其中第二种方法和第三种方法的积分步数选择以保证计算结果的相对误差达到0.5%以内为标准。

针对圆柱体火箭,采用曲线积分方法计算碰撞概率,并和采用曲线积分方法计算的球体火箭的计算结果进行对比,如表2所示。

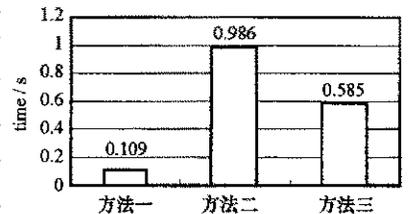


图4 三种方法所用的时间比较  
Fig.4 CPU time comparison

表 1 采用三种方法计算球体火箭碰撞概率的结果

Tab.1 Collision probability results for Sphere rocket using three calculation method

空间物体	包围球半径( m )	位置误差均方差( m )	相对距离( m )	方法一	方法二	方法三
物体 1	40	20000	40000	1.6917E-6	1.6925E-6	1.6831E-6
物体 2	10	20000	20000	3.7150E-6	3.7167E-6	3.6962E-6
物体 3	60	180	800	1.1415E-5	2.5760E-5	2.5455E-5

表 2 球体火箭和圆柱体火箭的碰撞概率计算结果

Tab.2 Collision probability results for sphere and cylinder rocket

空间物体	包围球半径( m )	位置误差均方差( m )	相对距离( m )	球体火箭	圆柱体火箭
物体 1	4	20000	40000	6.8941E-7	1.9385E-7
物体 2	10	20000	20000	3.6962E-6	8.6879E-7
物体 3	6	200	800	2.1762E-5	3.4986E-6

从表 1 的计算结果可以看出,二维数值积分方法和一维曲线积分方法两者的结果相近,表中的三组结果的最大相对误差小于 2%。方法一的结果在通常情况下也比较好,但是当总包围球的投影区概率密度变化较大时,计算结果的误差比较大,例如和物体 3 的碰撞概率计算结果相对误差达到了 55%。

从三种方法所花费的时间来看,方法三比方法二具有优势。方法一所需时间是最少的,它只需要其它方法 11% 的时间就可得到计算结果,所以方法一可以用来快速地计算出碰撞概率的初步结果。

将火箭分别考虑成球体和圆柱体的计算结果相差较大,表 2 中的结果一般都相差几乎一个数量级。对于具有明显的不规则形状的物体,将其适当地考虑成非球体对计算精度的提高有很大的好处。

## 4 结 论

飞行器的碰撞概率一般由轨道、位置误差的协方差矩阵和飞行器的形状决定。本文从协方差矩阵的最一般形式出发,推导出了三种飞行器碰撞概率的计算方法,这三种方法适合一般飞行器的碰撞概率计算。采用这三种方法对火箭和其它空间物体的碰撞概率进行了计算,计算中分别将火箭考虑成球体和圆柱体,并比较了三种方法在所需时间方面的差别。结果表明将总包围球投影内的概率密度函数看作均匀的方法具有计算所需时间少的优点,并且其结果在大多数情况下是可以接受的。二维数值积分的方法具有精度高的特点,可用来精确计算飞行器的碰撞概率。一维曲线积分方法的最大特点是便于计算极不规则形状飞行器的碰撞概率,灵活性非常大。

## 参 考 文 献:

- [1] Patera R P. General Method for Calculating Satellite Collision Probability[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2001, 24(4):716-722.
- [2] Patera R P, Peterson G E. Space Vehicle Maneuver Method to Lower Collision Risk to an Acceptable Level[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2003, 26(2):233-237.
- [3] Chan K. Collision Probability Analysis for Earth Orbiting Satellites[J]. Advances in the Astronautical Sciences, 1997, 96:1033-1048.
- [4] Paielli R A, Erzberger H. Conflict Probability Estimation for Free Flight[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1997, 20(3):588-596.
- [5] Patera R P. Method for Calculating Collision Probability Between a Satellite and a Space Tether[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2002, 25(5):940-945.
- [6] Patera R P. Satellite Collision Probability for Nonlinear Relative Motion[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2003, 26(5):728-733.



