

文章编号: 1001-2486(2006)05-0001-05

## 非局部弹性杆固有频率的 Ritz 法求解\*

雷勇军, 赵雪川, 唐国金

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**采用 Ritz 法求解了非局部弹性直杆的固有频率问题。非局部弹性理论与经典弹性理论相对应, 区别在于非局部理论中, 一点的应力与该点及其周围区域的应变都有关, 并采用核函数来表征这种相关性。基于 Eringen 提出的非局部弹性模型, 针对三种给定核函数, 用 Ritz 法进行了直杆的动力学分析。并针对两种边界条件给出直杆的固有频率, 与其它方法比较, 该方法具有可以针对多种核函数求解, 精度可控, 易于编程等优点。

**关键词:**非局部弹性体; 直杆; 固有频率; Ritz 法

**中图分类号:** O343.5 **文献标识码:** A

## Ritz Method for the Frequencies of Nonlocal Elastic Bar

LEI Yong-jun, ZHAO Xue-chuan, TANG Guo-jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Ritz method was adopted to study the natural frequency of nonlocal elastic bar. Nonlocal elastic theory, different from classic elastic theory, was presented that the stress of a point is related to the strain of the area around the point, and such a relationship is illustrated by kernel function. Based on Eringen's nonlocal elastic model, a dynamics analysis of nonlocal elastic bar was created by Ritz method with three different kernel functions. and the natural frequencies of the bar with two different boundary conditions were supplied. Compared with other methods, this one can deal with different kernel functions. Moreover, its numerical precision is controllable and programming is very convenient.

**Key words:** nonlocal elasticity; bar; natural frequency; Ritz method

1967年, Kroner<sup>[1]</sup>采用连续介质力学的方法分析了原子之间的吸附力, 所得到的结论与从晶格理论出发得到的结论相一致, 后来, Eringen<sup>[2]</sup>继承 Kroner 的工作, 并提出了非局部弹性理论, 该理论与经典的弹性理论相对应, 不同之处在于, 非局部理论中一点的应力不单单与受力点的应力有关, 而且与该点及其周围区域的应变都有关。随后 Eringen<sup>[3]</sup>给出了与其对应的变分方法, 进而通过平衡定律和热力学能量方程得到了非局部弹性理论的本构模型, 此后, 他又对非局部弹性理论进行了系统的研究, 并应用该理论分析了一维平面波的弥散特性, 所得结论与实验得到的结论相一致, 这说明, 非局部理论有望成为从经典连续介质力学的宏观尺度到原子和颗粒尺度考察物体的变形和运动的有力工具。经过三十多年的发展完善, 目前非局部弹性理论模型已经在断裂力学、粘弹性力学、晶体错位理论等多方面得到了广泛应用, 值得注意的是, 我国学者戴天民<sup>[4-5]</sup>采用非局部理论的方法对连续统场理论进行了大量的工作, 先后提出连续统场论、微极连续耦合场论、极性连续统理论的基本原理, 并对这些理论进行了详尽的论述, 同时总结了连续统理论在中国的发展历程, 丰富和完善了非局部弹性理论的内容; 黄再兴<sup>[6]</sup>重新推导了非局部弹性理论的基本方程, 并给出其基本方程与局部弹性理论的差别, 同时得到了反对称应力存在的结论, 赵明晖<sup>[7]</sup>利用非局部弹性理论给出了不连续位移的基本解。近年来, Lei<sup>[8]</sup>和 Adhikai<sup>[9]</sup>采用非局部理论的方法, 研究了含非局部阻尼分布参数系统的动力学问题, 并采用传递函数方法和 Galerkin 方法进行了求解。郑长良<sup>[10]</sup>基于一维非局部弹性体的微分型本构关系, 得到了几种边界条件

\* 收稿日期: 2006-05-15

基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(19925209); 国防科技大学预研基金资助项目

作者简介: 雷勇军(1968-), 男, 副教授, 博士。

下非局部弹性直杆的固有频率。然而,微分型本构关系只是针对指数型核函数的一种简化形式,对于其它的核函数,文献[10]却未提及。

## 1 非局部弹性模型

根据 Eringen 提出的非局部弹性理论,三维非局部弹性体的应力应变关系可以写为<sup>[2]</sup>

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V K(x, \xi) D \epsilon(\xi) dV(\xi) \quad \forall x \in V \quad (1)$$

其中,  $\sigma_{ij}$  为二阶应力张量,  $K(x, \xi)$  为核函数,用以表示弹性体的非局部效应,  $D = D_{ijkl}$  为四阶模量张量,对各向同性弹性体而言  $D$  可以表示成四阶对称张量形式

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2)$$

其中,  $\lambda, \mu$  为 Lamé 系数,  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号。从(1)式可以看出,在域  $V$  内,  $x$  点的应力  $\sigma_{ij}$  与整个积分区域  $V$  的应变  $\epsilon_{ij}$  都有关系,这是与经典弹性力学的本构方程有区别的,正是这种本构关系,更能反映材料真实的力学性质<sup>[11]</sup>。本文研究直杆的纵向振动,属于一维问题,其应力应变关系可以简化为

$$\sigma(x) = \int_L K(x, \xi) E(\xi) \epsilon(\xi) d\xi \quad \xi \in [0, L] \quad (3)$$

通过比较一维平面波弥散曲线, Eringen<sup>[12]</sup> 指出,对于指数型核函数, (1) 式的本构关系可以写成微分的形式

$$(1 + l_a^2 \nabla^2) t_{ij} = \sigma_{ij} \quad (4)$$

其中,  $t_{ij}$  为非局部应力,  $\sigma_{ij}$  为局部应力,  $l_a = e_0 a$ ,  $e_0$  为非局部弹性材料的特征长度,  $a$  为常数。

对于(1)式中的核函数  $K(x, \xi)$ , 它有多种形式,不同的问题可以采用不同的形式,对于一维问题,核函数主要有以下几种类型:

### (1) 指数型衰减核函数

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2l_a} e^{-|x-\xi|/l_a} \quad (5)$$

### (2) Error 型衰减核函数

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l_a} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2l_a^2}} \quad (6)$$

### (3) 矩形核函数

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{l_0} & |x - \xi| \leq \frac{l_0}{2} \\ 0 & |x - \xi| > \frac{l_0}{2} \end{cases} \quad (7)$$

### (4) 三角形衰减核函数

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{l_0} \left(1 - \frac{|x-\xi|}{l_0}\right) & |x - \xi| \leq l_0 \\ 0 & |x - \xi| > l_0 \end{cases} \quad (8)$$

### (5) 正弦型核函数

$$K(x, \xi) = \frac{\sin^2(|x-\xi|/l_a)}{(|x-\xi|/l_a)^2} \quad \frac{|x-\xi|}{l_a} \leq \pi \quad (9)$$

式(5)~(9)中,  $l_a, l_0$  为核函数的特征参数。当  $l_a = 0.5, l_0 = 2$  时,上述核函数如图 1 所示。

## 2 直杆固有频率的 Ritz 法求解

一均质直杆杆长为  $L$ , 截面面积为  $A$ , 密度为  $\rho$ , 纵向振动位移为  $u(x)$ , 轴向拉力为  $N(x)$ , 直杆振动形式如图 2 所示。

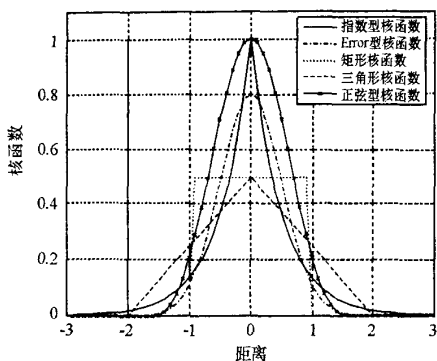


图1  $l_a = 0.5, l_0 = 2$  时5种不同的核函数  
Fig.1 Five different kernel functions for  $l_a = 0.5, l_0 = 2$

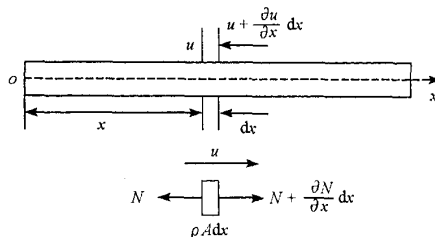


图2 直杆纵向振动示意图  
Fig.2 A straight bar in longitudinal vibration

## 2.1 建立控制方程

根据微元体平衡,可以得到平衡方程

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (10)$$

考虑到  $N = A\sigma(x)$ ,将(3)式代入(10)式得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^L K(x, \xi) E \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi \right) = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (11)$$

对(11)式进行 Laplace 变换得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^L K(x, \xi) E \frac{\partial U(\xi, s)}{\partial \xi} d\xi \right) - \rho s^2 U(x, s) = 0 \quad (12)$$

其中  $U(x, s)$  为  $u(x, t)$  的 Laplace 变换。

## 2.2 Ritz 法求解

在 Laplace 空间内,设非局部弹性直杆的纵向振动形式为

$$U(x, s) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(s) \quad (13)$$

$\phi_i(x)$  为试函数,任意两个试函数  $\phi_i(x)$  和  $\phi_j(x)$  都是相互正交的,且需要满足所有的边界条件, $n$  为试函数的个数, $n$  的选取需要根据精度来确定,一般  $n$  越大,描述的直杆的振动越准确,精度也越高。将(13)式带入(12)式,并且方程两侧同时乘以  $\sum_{i=1}^n \phi_i(x)$  并在  $[0, L]$  上积分,同时考虑到将核函数变为分段积分形式,可以得到

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^x K(x - \xi) E \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial \xi} q_i(s) d\xi + \int_x^L K(\xi - x) E \frac{\partial \phi_i(\xi, s)}{\partial \xi} q_i(s) d\xi \right] \phi_j(x) dx - \int_0^L \rho s^2 \phi_i(x, s) q_i \phi_j(x, s) dx \right\} = 0 \quad (14)$$

将上式写成矩阵形式为

$$(\mathbf{K} - s^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0 \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^x K(x - \xi) E \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial \xi} d\xi + \int_x^L K(\xi - x) E \frac{\partial \phi_i(\xi, s)}{\partial \xi} d\xi \right] \phi_j(x) dx \right\} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \sum_{i=1}^n q_i(s) \\ \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L \rho \phi_i(x) \phi_j(x) dx \end{cases} \quad (17)$$

为选取合适的试函数,这里给出直杆可能存在的边界条件,两端自由时,

$$\begin{cases} E \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ E \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

两端固定时

$$\begin{cases} u(x, s) \Big|_{x=0} = 0 \\ u(x, s) \Big|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

### 3 算例

选用参数  $L = 1.0\text{m}$ ,  $\rho = 2700\text{kg/m}^3$ ,  $E = 2.1 \times 10^8\text{N/m}^2$ ,  $l_a = 0.05\text{m}$  计算非局部弹性直杆纵向振动频率。采用经典的方法,对于两端固定和一端固定一端自由弹性直杆纵向振动,固有频率和固有振型可以参考文献[13],取

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad U_n(x) = a_i \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

对于弹性直杆纵向振动,文献[13]给出固有频率和固有振型为

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad U_n(x) = a_i \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (21)$$

对于指数型核函数,文献[10]给出非局部弹性直杆纵向振动频率表达式为

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{l_a}{L}n\pi\right)^2}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

为验证本文算法的正确性,计算了上述两种边界条件下,直杆纵向振动的固有频率。当边界条件为两端固定时,取试函数为(20)式形式;当边界条件为一端固定,一端自由时,取试函数为(21)式形式,针对三种核函数,分别计算直杆纵向振动的前五阶固有频率如表1和表2所示。

表1 两端固定时局部与非局部弹性直杆的频率比较(试函数选取7项)

Tab.1 Frequencies comparison of local and nonlocal elastic bar with clamped-clamped boundary condition (Trail function adopting seven terms)

频率 (Hz)	非局部弹性直杆				弹性直杆
	指数型核函数		Error 型核函数	矩形核函数	
	本文	文献[10]			
一阶	865.519	865.535	874.084	874.1904	876.148
二阶	1671.725	1671.740	1672.219	1686.457	1752.297
三阶	2377.740	2377.669	2380.928	2403.446	2628.445
四阶	2967.455	2967.455	2965.724	2997.130	3504.593
五阶	3445.183	3445.187	3447.965	3489.639	4380.742

表 2 一端固定一端自由时局部与非局部弹性直杆的频率比较(试函数选取 7 项)

Tab.2 Frequencies comparison of local and nonlocal elastic bar with clamped-free boundary condition (Trail function adopting seven terms)

频率 (Hz)	非局部弹性直杆				弹性直杆
	指数型核函数		Error 型核函数	矩形核函数	
	本文	文献[10]			
一阶	432.801	432.767	431.231	437.0947	438.074
二阶	1188.828	1188.835	1193.734	1202.723	1314.222
三阶	1722.589	1722.593	1721.568	1737.819	2190.371
四阶	2063.248	2063.218	2059.640	2080.850	3066.519
五阶	2276.762	2276.833	2281.691	2296.601	3942.667

从表 1 和表 2 可以看出,两种边界条件下,对于指数型核函数,本文的结果与文献[10]结果基本一致,这从数值上证明了,对于指数型核函数,一维非局部弹性体积分型本构关系与微分型本构关系是等价的。

对于非指数型核函数,非局部弹性直杆的固有频率与指数型核函数有差别,并且非局部弹性直杆的固有频率较局部弹性直杆的固有频率低。

文献[10]仅给出指数型核函数非局部弹性直杆的固有频率,此处仅以三种核函数为例,然而本文算法可以针对多种核函数计算直杆纵向振动的固有频率,并且计算精度可以根据试函数选取的多少自行控制。

#### 4 结论

基于 Eringen 提出的非局部弹性本构关系模型,采用 Ritz 法,针对三种核函数,进行了非局部弹性直杆纵向振动的动力学分析,得到了两端固定和一端固定一端自由两种边界条件下,非局部弹性直杆纵向振动的固有频率。结果表明,对于指数型核函数,本文所得结论与文献[10]所得结论一致,这从数值上证明了对于指数型核函数,一维非局部弹性体的积分型本构关系和微分型本构关系的等价性;同时本文方法具有计算多种核函数、计算精度可控、易于编程实现等优点。

#### 参考文献:

- [1] Kroner E. Elasticity Theory of Material with Long Range Cohesive Forces[J]. International Journal of Solids and Structures, 1967, 3:731-742.
- [2] Eringen A C. Non-local Polar Elastic Continua[J]. International Journal of Engineering Science, 1972, 10(1):1-16.
- [3] Eringen A C. Nonlocal Micropolar Field Theory in Continuum Physics[M]. New York: Academic Press, 1976:205-267.
- [4] 戴天民. 广义连续统场论在中国的进展[J]. 辽宁大学学报(自然科学版), 1999, 26(1):1-11.
- [5] 戴天民. 广义连续统场论在中国的进展(续篇)[J]. 辽宁大学学报(自然科学版), 1999, 31(4):295-301.
- [6] 黄再兴. 关于非局部理论的几个新观点及其在断裂力学中的应用(Ⅲ)——重论线性非局部弹性理论[J]. 应用数学与力学, 1999, 20(11):1193-1196.
- [7] 赵明峰,程昌钧,刘元杰,等. 三维非局部弹性场中裂纹问题的分析[J]. 应用数学与力学, 1999, 20(5):445-451.
- [8] Lei Y (雷勇军), Friswell M I, Adhikari S. A Galerkin Method for Distributed Systems with Nonlocal Damping[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(11-12):3381-3400.
- [9] Adhikai S, Lei Y (雷勇军), Friswell M I. Dynamics of Non-viscously Damped Distributed Parameter Systems[R]. AIAA 2005-1951, 2005.
- [10] 郑长良. 非局部弹性直杆振动特征及 Eringen 常数的一个上限[J]. 力学学报, 2005, 37(6):796-798.
- [11] Eringen A C. 非局部场论[M]. 戴天民,译. 南京:江苏科学技术出版社, 1981.
- [12] Eringen A C. On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solution of Screw Dislocation and Surface Waves[J]. Applied Physics, 1983, 54(9):4703-4710.
- [13] 邹经湘. 结构动力学[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 1999.



