

文章编号: 1001 - 2486(2006)05 - 0119 - 04

# 快速傅立叶变换用于 Fokker-Planck-Landau 方程的数值求解\*

王一博, 王尚武

(国防科技大学 光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**利用谱方法和 FFT 技术对 Fokker-Planck-Landau 方程进行了数值求解,研究了均匀空间条件下粒子在速度空间的分布函数随时间的演化。数值计算表明,所用计算方法能够很好地满足质量、动量和能量守恒要求,计算速度与有限差分方法相比大大加快。

**关键词:**Fokker-Planck-Landau 方程;谱方法;快速傅立叶变换

**中图分类号:** O571 **文献标识码:** A

## Numerical Solution of Fokker-Planck-Landau Equation by FFT Technique

WANG Yi-bo, WANG Shang-wu

(College of Photo-electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:**The spectral method and FFT algorithm were applied to the numerical solution of Fokker-Planck-Landau equation of charged particles transported in plasma, the evolution of the distribution function of charged particles in 3-d velocity space was simulated numerically in homogeneous coordinate space. Computational results show that the conservations of mass, momentum and energy are maintained accurately by the adopted numerical scheme, and the computation cost is reduced considerably.

**Key words:**Fokker-Planck-Landau equation; spectral method, fast Fourier transformation

Fokker-Planck-Landau 方程是考虑了等离子体中粒子间二体小角度库仑碰撞效应的带电粒子输运方程,可以用来描述等离子体物理、加速器物理和天体物理中带电粒子间的库仑相互作用。Fokker-Planck-Landau 方程的复杂性主要来源于其中的碰撞项。2000 年,意大利数学家 L. Pareschi 等人<sup>[1]</sup>提出了在速度空间离散 Fokker-Planck-Landau 碰撞算子的快谱方法,该方法仅用量级为  $O(n^3 \log^2 n)$  ( $n$  为速度空间的离散点数)次乘法运算就能得到具有谱精度的数值解,并且证明了此方法能够严格保证质量守恒,动量和能量守恒也能达到谱方法所具有的精度。

### 1 Fokker-Planck-Landau 方程

设等离子体由  $S$  类带电粒子所构成。第  $\nu$  类粒子的相空间分布函数  $f^{(\nu)}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$  ( $\nu = 1, \dots, S$ ) 满足的 Fokker-Planck-Landau 方程为<sup>[2]</sup>:

$$\frac{\partial f^{(\nu)}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla f^{(\nu)}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) + \frac{\mathbf{F}^{(\nu)}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{V}} f^{(\nu)}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = \sum_{\mu=1}^S C(f^{(\nu)}, f^{(\mu)}) \quad (1)$$

其中

$$C(f^{(\nu)}, f^{(\mu)}) = m^{(\nu)} \nabla_{\mathbf{V}} \cdot \int d\mathbf{W} \frac{\Theta_{\nu\mu}}{U} \mathbf{X} \cdot \left[ \frac{1}{m^{(\mu)}} f^{(\mu)}(\mathbf{W}) \nabla_{\mathbf{V}} f^{(\nu)}(\mathbf{V}) - \frac{1}{m^{(\nu)}} f^{(\nu)}(\mathbf{V}) \nabla_{\mathbf{W}} f^{(\mu)}(\mathbf{W}) \right] \quad (2)$$

称为 Fokker-Planck-Landau 碰撞分项;  $\Theta_{\nu\mu} = \frac{2\pi(Kq^{(\nu)}q^{(\mu)})^2}{(m^{(\nu)})^2} \ln \Lambda$ ,  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\ln \Lambda$  为库仑对数;  $U = V - W$  为

\* 收稿日期: 2005 - 11 - 10  
作者简介: 王一博(1982-),男,助教。

二类粒子之间的相对速度,  $U = |U|; \mathbf{X} = \mathbf{I}_3 - \frac{UU}{U^2}$ 。由于 Fokker-Planck-Landau 方程的复杂性主要存在于碰撞项中, 忽略掉方程中空间漂移项而研究求解简化后的 Fokker-Planck-Landau 方程

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)}{\partial t} = \sum_{\mu=1}^s C(f^{(\nu)}, f^{(\mu)}) \quad (3)$$

## 2 Fokker-Planck-Landau 方程的傅立叶变换

假设只有两种成分的粒子参与碰撞, 它们的分布函数分别为  $f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$  和  $y(\mathbf{r}, \mathbf{W}, t)$ 。按照相对速度的定义  $U = V - W$ , (2) 式对背景粒子速度  $W$  积分时, 可视入射粒子速度  $V$  固定, 对  $W$  的积分可化为对相对速度  $U$  的积分, 再令  $U = -U$ , 可将 Fokker-Planck-Landau 碰撞分项变形为:

$$C(f, y) = \Theta_{\mathbf{f}} \nabla_{\mathbf{V}} \cdot \int_{k_u} dU \frac{1}{U} \mathbf{X} \cdot \left[ y(\mathbf{V} + \mathbf{U}) \nabla_{\mathbf{V}} f(\mathbf{V}) - \frac{m_f}{m_y} f(\mathbf{V}) \nabla_{\mathbf{V}} y(\mathbf{V} + \mathbf{U}) \right] \quad (4)$$

数值计算分布函数  $f$ , 只能将其限制在速度空间一定的范围之内, 在这个范围外则认为  $f = 0$ 。设这个范围是球形域  $B(0, R)$ , 那么它们的相对速度的范围就是球形域  $B(0, 2R)$ 。对  $f(\mathbf{V})$ 、 $y(\mathbf{V} + \mathbf{U})$  在速度空间作傅立叶级数展开, 首先需要将  $f(\mathbf{V})$ 、 $y(\mathbf{V} + \mathbf{U})$  延拓成周期性函数。在速度空间以立方体  $C[-T, T]^3$  为周期, 那么这个周期应包含相对速度的范围, 即要求  $T \geq 2R$ 。

在周期  $C[-T, T]^3$  内, 对  $f(\mathbf{V})$ 、 $y(\mathbf{V} + \mathbf{U})$  作三维傅立叶级数展开并截断得

$$\begin{cases} f(\mathbf{V}) = \sum_{l=-N}^{N-1} F(l) e^{i\frac{2\pi}{2T} l \cdot \mathbf{V}}, & F(l) = \frac{1}{(2T)^3} \int_{C[-T, T]^3} f(\mathbf{V}) e^{-i\frac{2\pi}{2T} l \cdot \mathbf{V}} d\mathbf{V} \\ y(\mathbf{V} + \mathbf{U}) = \sum_{m=-N}^{N-1} Y(m) e^{i\frac{2\pi}{2T} m \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{U})}, & Y(m) = \frac{1}{(2T)^3} \int_{C[-T, T]^3} y(\mathbf{W}) e^{-i\frac{2\pi}{2T} m \cdot \mathbf{W}} d\mathbf{W} \end{cases} \quad (5)$$

这里的  $l = (l_1, l_2, l_3)$ 、 $m = (m_1, m_2, m_3)$  及  $N = (N_1, N_2, N_3)$  都是三维整数, 上下限取  $\pm(N-1)$  是使用 FFT 算法的需要。

将  $f(\mathbf{V})$ 、 $y(\mathbf{V} + \mathbf{U})$  的展开式(5)代入变形后的碰撞分项(4), 从而可将简化方程(3)化为:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial t} = \sum_y \frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial t} \Big|_y \\ \frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial t} \Big|_y = -\Theta_{\mathbf{f}} \sum_m F(\mathbf{k} - \mathbf{m}) Y(\mathbf{m}) \beta(\mathbf{k} - \mathbf{m}, \mathbf{m}) \\ \beta(l, m) = \int_{B(0, \pi)} d\omega \frac{1}{\omega} \left[ (l + m) \cdot \left( l - \frac{m_f}{m_y} m \right) - (l + m) \cdot \frac{\omega}{\omega} \left( l - \frac{m_f}{m_y} m \right) \cdot \frac{\omega}{\omega} \right] e^{im \cdot \omega} \end{cases} \quad (6)$$

由此可见, Fokker-Planck-Landau 碰撞分项式(2)中对  $dW$  的积分化为对  $dU$  的积分式(4)后, 再通过对  $f(\mathbf{V})$ 、 $y(\mathbf{V} + \mathbf{U})$  作多维傅立叶级数展开过程被单独地分离出来, 变成无量纲函数  $\beta(l, m)$ 。而  $\beta(l, m)$  可以事先计算好, 从而大大地降低了问题的复杂性。

方程(6)严格地保证了质量守恒, 由  $\beta(-m, m) = 0$  可得到:

$$\frac{\partial F(0)}{\partial t} = - \sum_y \left\{ \Theta_{\mathbf{f}} \sum_m F(-m) Y(m) \beta(-m, m) \right\} = 0 \quad (7)$$

而  $F(0) = \frac{1}{(2T)^3} \int_{C[-T, T]^3} f(\mathbf{V}) e^0 d\mathbf{V} = \frac{n_0}{(2T)^3}$ , 可见只要  $F(0)$  保持不变, 质量守恒便可得到满足。

## 3 引入 FFT 算法降低运算量

方程组(6)的右端具有离散卷积的雏形。把  $\beta(\mathbf{k} - \mathbf{m}, \mathbf{m})$  中含有  $(\mathbf{k} - \mathbf{m})$ 、 $\mathbf{m}$  的部分分离, 并记:

$$\begin{cases} G(\mathbf{m}) = \int_{B(0,\pi)} \frac{1}{\omega} e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{\omega} \\ H_{pq}(\mathbf{m}) = \int_{B(0,\pi)} \frac{1}{\omega^3} \omega_p \omega_q e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{\omega} \\ B(\mathbf{m}) = [m^2 G(\mathbf{m}) - \sum_{pq} m_p m_q H_{pq}(\mathbf{m})] \end{cases} \quad (p, q = 1, 2, 3) \quad (8)$$

这 3 个常数组可以一次性算好。记  $\frac{m_x}{m_y} = \theta$ , 则(6)式可以化为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial t} \right|_y = & -\Theta_y \left\{ \sum_{\mathbf{m}} [(k - \mathbf{m})^2 F(k - \mathbf{m})] \cdot [Y(\mathbf{m}) G(\mathbf{m})] + (1 - \theta) \sum_p \sum_m \right. \\ & [(k_p - m_p) F(k - \mathbf{m})] \cdot [m_p Y(\mathbf{m}) G(\mathbf{m})] - \theta \sum_m [F(k - \mathbf{m})] \cdot [Y(\mathbf{m}) B(\mathbf{m})] \\ & - (1 - \theta) \sum_{pq} \sum_m [(k_p - m_p) F(k - \mathbf{m})] \cdot [m_q Y(\mathbf{m}) H_{pq}(\mathbf{m})] \\ & \left. - \sum_{pq} \sum_m [(k_p - m_p)(k_q - m_q) F(k - \mathbf{m})] \cdot [Y(\mathbf{m}) H_{pq}(\mathbf{m})] \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

(9) 式的右端实际上是一系列离散卷积求和, 每一离散卷积可简写为  $a_k = \sum_{\mathbf{m}} b_{\mathbf{m}} c_{k-\mathbf{m}}$ .

按照普通算法(即单独地计算每一个  $a_k$ ), 需要  $(2N - 1)^3$  次乘法, 算出所有的  $a_k$  就需要  $(2N - 1)^6$  次乘法。为了降低运算开销, 这里引入 FFT 算法<sup>[3]</sup>:

先将  $b, c$  的原始大小为  $(2N - 1) \times (2N - 1) \times (2N - 1)$  的数据, 分别放入大小为  $4N \times 4N \times 4N$  的内存容器  $(i, j, k \in [-2N, 2N - 1])$  的“左下角”(不包括其中 3 个底面  $i, j, k = -2N$ ); 使用传统的行列算法对  $b, c$  所在的内存容器作三维 FFT;  $b, c$  所在的内存容器逐项相乘, 结果存于  $a$  容器中; 最后对  $a$  容器作三维逆 FFT, 容器中部  $(i, j, k \in [-(N - 1), N - 1])$  的数据就是要求的离散卷积。

以  $N = 4$  为例(数据左右界为  $[-3, 3]$ ), 图 1 展示了 FFT 算法的简要流程。

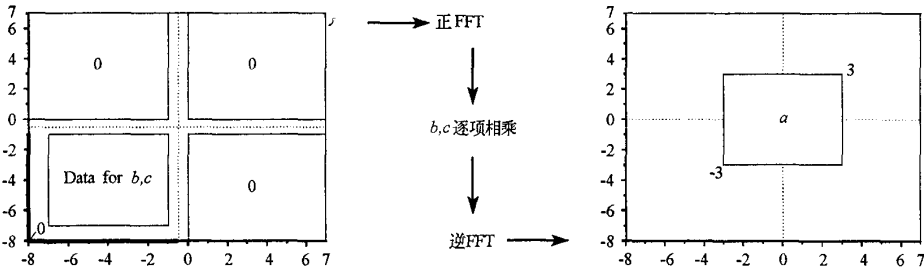


图 1 利用 FFT 计算离散卷积的简要流程

Fig.1 The procedure of computing the discrete convolution by FFT algorithm

此算法的特点是联立计算  $a_k$ 。考虑到容器内含有大量的 0, 如上算法可以将乘法次数减至  $64N^3 \cdot \{3.25 \log_2 [4N] + 1\}$ , 对运算量的节省十分可观。

#### 4 数值模拟

取时间以  $s$  为单位; 设质量为  $m$  的粒子在温度  $T_0$  下的平均热速率为  $V_h = \sqrt{kT_0/m}$ , 则粒子速度以  $[V_h]$  为单位; 相空间分布密度  $f(\mathbf{V}, t)$  以  $[n_0/V_h^3]$  为单位; 电荷以电子电量的绝对值  $e$  为单位; 质量以电子或质子的质量  $m$  为单位; 速度周期  $T$  也以  $[V_h]$  为单位; 对  $f(\mathbf{V}, T)$  作傅里叶级数展开后, 展开系数  $F(\mathbf{k})$  的单位也是  $[n_0/V_h^3]$ 。

假设在无限大空间中均匀地充满了电子, 空间密度  $n_0 = 1 \times 10^{26} (1/m^3)$ , 热特征速度  $V_h = \sqrt{kT_0/m_e} = 1 \times 10^6 [m/s]$ 。在某个时刻, 其中一半以  $5V_h$  的速度向左漂移, 另一半以  $5V_h$  的速度向右漂移, 其无量

纲化后的初始分布函数可表示为

$$f(\mathbf{V}, t=0) = 0 \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{2} \left\{ \exp\left[-\frac{V_x^2 + V_y^2 + (V_z - 5)^2}{2}\right] + \exp\left[-\frac{V_x^2 + V_y^2 + (V_z + 5)^2}{2}\right] \right\} \quad (10)$$

取  $R = 5 + 3 = 8, T = 2R = 16$ , 离散点数  $2N = 32$ 。

此初始分布经足够时间的碰撞弛豫后, 必将趋近于以下麦克斯韦分布

$$f(\mathbf{V}, t = \infty) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma')^3} \exp\left[-\frac{V^2}{2(\sigma')^2}\right] \quad (11)$$

根据初、末态能量守恒, 解得  $\sigma' = \sqrt{28/3} \approx 3.055, 2\sigma' \approx 6.11$ , 所以

$$f(V = 2\sigma', t = \infty) \approx (\sqrt{2\pi} \times 3.055)^{-3} e^{-2} \approx 3.104 \times 10^{-4} \quad (12)$$

为了验证能量守恒, 可以检验最终态的数值结果在  $V = 2\sigma'$  的点上的值是否接近  $3.104 \times 10^{-4}$ , 由于三维函数的作图不像二维函数那样直观, 于是这里对各个时刻绘出  $f(\mathbf{V}, t) = 3.104 \times 10^{-4}$  的等位面, 并观察最终态等位面(呈球形)的半径是否等于  $2\sigma' \approx 6.11$ 。

利用四阶 Runge-Kutta 格式<sup>[4]</sup>求解微分方程(9), 可以得到分布函数随时间的演化的计算结果( $f = 3.104 \times 10^{-4}$ 等位面)。

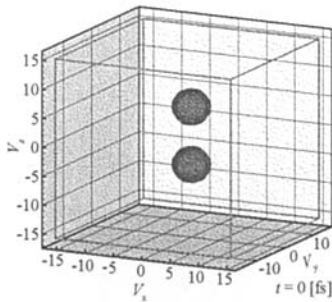


图2  $t = 0\text{fs}$ 时刻电子在速度空间分布函数  
Fig.2 The distribution function at  $t = 0\text{fs}$

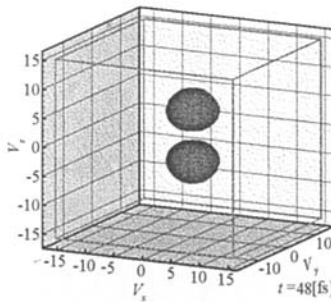


图3  $t = 48\text{fs}$ 时刻电子在速度空间分布函数  
Fig.3 The distribution function at  $t = 48\text{fs}$

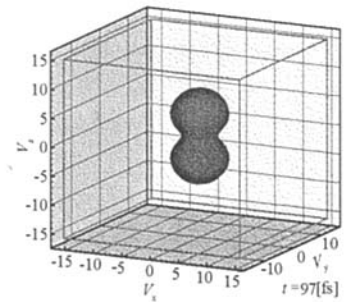


图4  $t = 87\text{fs}$ 时刻电子在速度空间分布函数  
Fig.4 The distribution function at  $t = 87\text{fs}$

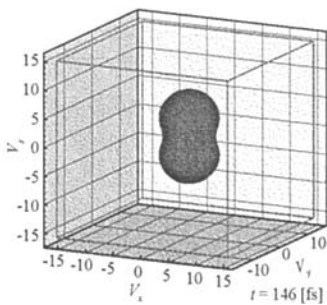


图5  $t = 146\text{fs}$ 时刻电子在速度空间分布函数  
Fig.5 The distribution function at  $t = 146\text{fs}$

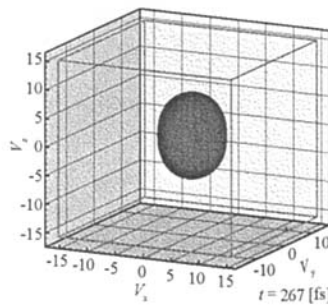


图6  $t = 267\text{fs}$ 时刻电子在速度空间分布函数  
Fig.6 The distribution function at  $t = 267\text{fs}$

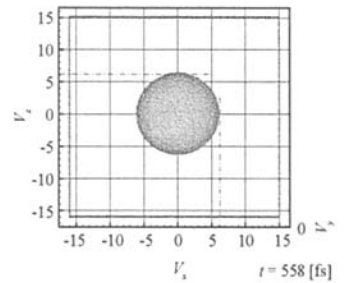


图7  $t = 588\text{fs}$ 时刻电子在速度空间分布函数  
Fig.7 The distribution function at  $t = 588\text{fs}$

从图2~7中可以看出粒子的分布逐渐向麦克斯韦分布靠拢; 从图7中可以看出: 在  $V_z, V_x$  (同  $V_y$ ) 两个方向上, “ $2\sigma$  面”的半径都接近于 6.11, 这表明前面所用的计算方法能够精确地保证能量守恒, 而等位面的中心位于原原则表明此方法也能精确地保证动量守恒。

在表 2 和表 3 中,任务编号指的是实际的观测需求编号,例如 31(1)指的是周期性任务分解的第一个周期对应的任务。从调度结果可以看出,本文提出的方法不仅能够给出具体的调度方案,还能够对调度结果进行分析,并根据调度结果来评估卫星系统的能力。“时间窗口不满足”可能由于时间窗口不能满足任务的持续时间或不满足任务的开始时间要求,导致任务没有合适的可见时间窗口。“没有时间窗口”一项是指在调度时间范围内地面目标和卫星系统中所有的传感器均不可见。对于其他的任务未完成原因就不在这里一一分析。

## 5 结论

以成像侦察卫星的任务调度为背景,对卫星任务调度问题进行了研究,提出了成像侦察卫星任务调度问题的约束规划模型,采用变邻域禁忌搜索算法求解约束规划模型,并对计算结果进行了比较分析。所提出的约束规划模型可以应用于多卫星的任务规划与调度问题。

## 参考文献:

- [1] 方炎申,陈英武,顾中舜. 中继卫星调度问题的 CSP 模型[J]. 国防科技大学学报, 2005, 27(2):6-10.
- [2] Globus A, Crawford J, Lohn J, et al. Earth Observing Fleets Using Evolutionary Algorithms: Problem Description and Approach[C]. Proceedings of the 3rd International NASA Workshop on Planning and Scheduling for Space, NASA, 2002.
- [3] Frank J, Jonsson A, Morris R, et al. Planning and Scheduling for Fleets of Earth Observing Satellites[C]. Proceeding of the 6th International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics, Automation and Space 2002, Montreal, 2002.
- [4] Lemaire M, Verfaillie G, Frank J, et al. How to Manage the New Generation of Agile Earth Observation Satellites[C]. SpaceOPS 2000, France, 2000.
- [5] 贺仁杰,谭跃进. 加权约束满足问题的改进深度优先搜索算法[J]. 系统工程学报, 2004, 19(5): 512-516.
- [6] 刘洋,陈英武,谭跃进. 一种有新任务到达的多卫星动态调度模型与方法[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 4: 35-41.
- [7] 李菊芳,谭跃进. 导引式局部搜索在一类过度约束 VRP 中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(11): 1612-1615.
- [8] ILOG. ILOG Cplex 8.1 User's Manual[Z]. 2003.
- [9] ILOG. ILOG Solver 6.0 User's Manual[Z]. 2003.
- [10] Analytical Graphics Incorporation (AGI). Satellite Tool Kit 5.0[Z]. 2003.

(上接第 122 页)

## 5 结束语

谱方法离散后的碰撞项简洁明了,摆脱了原 Fokker-Planck-Landau 方程碰撞项中既含微分又含积分给数值求解所带来的困难。由于化为一系列离散卷积之和,引入 FFT 算法后其运算量大为降低。数值模拟结果表明,计算方法在严格保证质量守恒的同时,也能精确地保证动量、能量守恒。

## 参考文献:

- [1] Pareschi L, Russo G, Toscaniz G. Fast Spectral Methods for the Fokker-Planck-Landau Collision Operator [J]. Journal of Comput. Phys., 2000, 165: 216-236.
- [2] 黄祖洽. 输运理论[M]. 北京:原子能出版社,1987.
- [3] 布赖姆 E O. 快速富里叶变换[M]. 上海:上海科学技术出版社,1983.
- [4] 李立康,等. 微分方程数值解法[M]. 上海:复旦大学出版社,1998.

