

粘弹性谱随机有限元*

田四朋,雷勇军,唐国金

(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘要 发展了一种粘弹性谱随机有限元法(VSSFEM),并将其用于固体火箭发动机装药结构随机分析。基于不可压或近似不可压粘弹性增量有限元方法和正交展开理论,考虑固体推进剂泊松比的随机性,推导了粘弹性谱随机有限元列式,最后对弹性约束的圆柱形中孔药柱进行了随机分析。算例分析表明该方法能够正确有效地进行粘弹性体随机分析。

关键词 不可压;固体推进剂;正交展开;随机有限元

中图分类号 O342 **文献标识码** A

Viscoelastic Spectral Stochastic Finite Element

TIAN Si-peng, LEI Yong-jun, TANG Guo-jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract A kind of viscoelastic spectral stochastic finite element method(VSSFEM) was developed and stochastic analysis of solid rocket motor grains was presented. Considering the randomness of solid propellant Poisson's ratio, viscoelastic spectral stochastic finite element formulations were derived from the incompressible or nearly incompressible viscoelastic incremental finite element method and orthogonal expansion theory. Finally, stochastic analysis of a hollow cylindrical grain with elastic restraint was presented. Analysis of examples indicates that this method is efficient and effective for stochastic analysis of viscoelastic body.

Key words incompressible; solid propellant; orthogonal expansion; stochastic finite element

目前,考虑不确定因素的影响已经成为结构分析领域的一种趋势。然而在固体火箭发动机结构完整性分析领域,由于固体推进剂具有粘弹性和近似不可压性,给随机分析造成了很大的困难,因而研究较少。但是推进力学性能参数尤其是泊松比对固体火箭发动机结构完整性影响很大^[1],而泊松比达到千分之几精度的测量还很困难^[2],况且由于制造、工艺等因素的影响,推进剂泊松比客观上具有随机性^[3],因此,发展能够考虑推进剂泊松比随机性的固体火箭发动机结构分析方法是必要的。

较早用于考虑推进剂性能参数不确定性的是 Monte-Carlo 方法^[4],但是该方法因计算量大难以应用于工程实际。针对此问题,张海联^[5]发展了一种粘弹性摄动随机有限元方法,不过,随机摄动法仅适用于随机参数小变异的情况,且对于动力问题,摄动随机有限元法不适用。而采用正交多项式展开的方式求取随机结构的响应^[6-7],也即谱方法,适用于结构静、动力分析及随机参数大变异的情况,然而,有关粘弹性谱随机有限元方法的研究尚未见诸报道。

本文考虑固体推进剂泊松比的随机性,给出了三维粘弹性谱随机有限元列式,并用于分析固体火箭发动机药柱的随机响应,从而为下一步在概率意义上评判固体火箭发动机结构完整性奠定了基础。

1 基于 Herrmann 变分原理的粘弹性有限元

考虑固体推进剂的近似不可压特性,基于 Herrmann 变分原理^[8],其应力应变张量可设为

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \sigma_H]^T \quad (1)$$

* 收稿日期 2006-07-08

基金项目 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20069998002);国家部委预研资助项目(513270301);国防科技大学基础研究计划项目(JC06-01-01)

作者简介:田四朋(1978—),男,博士生。

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad H]^T \quad (2)$$

式中, H 为平均应力函数。则适用于不可压和近似不可压分析的粘弹性本构关系为^[9]

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{D} \int_0^t G(\xi - \xi') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \tilde{\mathbf{D}} \int_0^t G(\xi - \xi') \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

剪切松弛模量采用广义 Maxwell 模型表示为

$$G(\xi) = G_\infty + \sum_{j=1}^{n_G} G_j e^{-\xi/\beta_j} \quad (4)$$

将时间 $[0, t]$ 分为 $[0, t_1], \dots, [t_{n-1}, t_n], \dots, [t_{m-1}, t_m]$ ($m > n$) 共 m 个时间段, 考虑零初始条件, 假定应变在任一时间段内线性变化, 对剪切松弛模量进行矩形离散, 并采用增量法处理粘弹性本构关系中的遗传积分, 经过一系列推导可得

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}(t_n) = \Delta \boldsymbol{\sigma}_e(t_n) + \Delta \boldsymbol{\sigma}_r(t_n) - \Delta \boldsymbol{\sigma}_{Te}(t_n) - \Delta \boldsymbol{\sigma}_{Tr}(t_n) \quad (5)$$

其中

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_e(t_n) = \mathbf{D} G(0) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_n), \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{Te}(t_n) = \tilde{\mathbf{D}} G(0) \Delta \boldsymbol{\theta}(t_n)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_r(t_n) = \mathbf{D} \sum_{j=1}^{n_G} G_j (e^{-\Delta \xi_n / \beta_j} - 1) \boldsymbol{\eta}_r(t_n), \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{Tr}(t_n) = \tilde{\mathbf{D}} \sum_{j=1}^{n_G} G_j (e^{-\Delta \xi_n / \beta_j} - 1) \boldsymbol{\eta}_{Tr}(t_n)$$

$$\boldsymbol{\eta}_r(t_n) = \sum_{i=1}^{n-1} e^{-(\xi_{n-1} - \xi_i) \gamma \beta_j} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_i), \quad \boldsymbol{\eta}_{Tr}(t_n) = \sum_{i=1}^{n-1} e^{-(\xi_{n-1} - \xi_i) \gamma \beta_j} \Delta \boldsymbol{\theta}(t_i)$$

基于虚功原理的增量形式, 可得单元平衡方程

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}(t_n) = \Delta \mathbf{F}(t_n) - \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_r(t_n) dV + \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{Te}(t_n) dV + \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{Tr}(t_n) dV \quad (6)$$

其中,

$$\mathbf{E} = G(0) \mathbf{D} = \left(G_\infty + \sum_{j=1}^{n_G} G_j \right) \mathbf{D}$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV$$

$$\Delta \mathbf{F}(t_n) = \int_V \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{f}(t_n) dV + \int_S \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{p}(t_n) dS$$

2 粘弹性谱随机有限元方程

将泊松比 ν 视为随机变量, 则它可用均值为 0、标准差为 1 的标准化随机变量 ξ_ν 表示:

$$\nu = \nu_0 + \nu_r \xi_\nu \quad (7)$$

其中, ν_0 为泊松比的均值, ν_r 为泊松比的标准差。

将单元刚度矩阵 \mathbf{K} 展开为标准化随机变量 ξ_ν 的级数形式, 并进行线性截断, 有

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1^v \xi_\nu \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}_0 \mathbf{B} dV = \mathbf{K} \Big|_{\xi_\nu=0}$$

$$\mathbf{K}_1^v = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_\nu} \Big|_{\xi_\nu=0} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}_1^v \mathbf{B} dV = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi_\nu} \mathbf{B} \Big|_{\xi_\nu=0} dV$$

而 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 为材料矩阵, 其均值参数矩阵及一阶导数矩阵分别为

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} \Big|_{\xi_\nu=0} = \left(G_\infty + \sum_{j=1}^{n_G} G_j \right) \mathbf{D}_0$$

$$\mathbf{E}_1^v = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi_\nu} \Big|_{\xi_\nu=0} = \left(G_\infty + \sum_{j=1}^{n_G} G_j \right) \mathbf{D}_1^v$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2v_0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2v_0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2v_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2v_0 & 2v_0 & 2v_0 & 0 & 0 & 0 & -2v_0(1-2v_0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1^v = v_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2+8v_0 \end{bmatrix}$$

泊松比的随机性将导致单元平衡方程中的 $\Delta \mathbf{U}(t_n)$, $\Delta \boldsymbol{\sigma}_r(t_n)$, $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_e}(t_n)$, $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_r}(t_n)$ 也是随机的。设 $H_l(\zeta_v)$ ($l=1, 2, \dots$) 为随机函数空间的标准正交函数系(比如,如果随机变量为正态分布,那么 $H_l(\zeta_v)$ 为带权 Hermite 多项式),并可进行如下正交分解^[6]:

$$\Delta \mathbf{U}(t_n) = \sum_{l=0}^N \Delta \mathbf{U}_l(t_n) H_l(\zeta_v) \quad (9)$$

$$\int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_r(t_n) \mathrm{d}V = \int_V \mathbf{B}^T \sum_{l=0}^N \Delta \boldsymbol{\sigma}_r^l(t_n) H_l(\zeta_v) \mathrm{d}V \quad (10)$$

$$\int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_e}(t_n) \mathrm{d}V = \int_V \mathbf{B}^T \sum_{l=0}^N \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_e}^l(t_n) H_l(\zeta_v) \mathrm{d}V \quad (11)$$

$$\int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_r}(t_n) \mathrm{d}V = \int_V \mathbf{B}^T \sum_{l=0}^N \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_r}^l(t_n) H_l(\zeta_v) \mathrm{d}V \quad (12)$$

其中, N 为正交分解的项数。

将式(8)~(12)代入单元平衡方程(6)可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1^v \zeta_v) \sum_{l=0}^N \Delta \mathbf{U}_l(t_n) H_l(\zeta_v) &= \Delta \mathbf{F}(t_n) - \sum_{l=0}^N \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_r^l(t_n) H_l(\zeta_v) \mathrm{d}V \\ &+ \sum_{l=0}^N \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_e}^l(t_n) H_l(\zeta_v) \mathrm{d}V + \sum_{l=0}^N \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_r}^l(t_n) H_l(\zeta_v) \mathrm{d}V \end{aligned} \quad (13)$$

将上式两边分别乘以 $H_k(\zeta_v)$ ($k=0, 1, 2, \dots, N$), 并利用正交多项式的递推关系^[10]有

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^N \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{U}_l(t_n) H_l(\zeta_v) H_k(\zeta_v) + \sum_{l=0}^N \mathbf{K}_1^v \Delta \mathbf{U}_l(t_n) H_l(\zeta_v) [\alpha_l H_{l-1}(\zeta_v) + \beta_l H_l(\zeta_v) + \gamma_l H_{l+1}(\zeta_v)] \\ &= \Delta \mathbf{F}(t_n) H_k(\zeta_v) - \sum_{l=0}^N \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_r^l(t_n) H_l(\zeta_v) H_k(\zeta_v) \mathrm{d}V + \sum_{l=0}^N \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_e}^l(t_n) H_l(\zeta_v) H_k(\zeta_v) \mathrm{d}V \\ &+ \sum_{l=0}^N \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_r}^l(t_n) H_l(\zeta_v) H_k(\zeta_v) \mathrm{d}V \end{aligned} \quad (14)$$

两边同时取 ζ_v 的数学期望, 并利用随机泛函空间标准化正交函数系的正交性可得

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{U}_k(t_n) + \mathbf{K}_1^v [\alpha_{k+1} \Delta \mathbf{U}_{k+1}(t_n) + \beta_k \Delta \mathbf{U}_k(t_n) + \gamma_{k-1} \Delta \mathbf{U}_{k-1}(t_n)] \\ &= \Delta \mathbf{F}(t_n) \delta_{0k} - \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_r^k(t_n) \mathrm{d}V + \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_e}^k(t_n) \mathrm{d}V + \int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{T_r}^k(t_n) \mathrm{d}V \quad (k=0, 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (15)$$

上式即为粘弹性谱随机有限元的控制方程。同样,类似于上述推导过程,可以得到响应量(如位移,

应变、应力等)的递推求解格式,限于篇幅,此处不再赘述。

3 响应量的统计特征

不妨用变量 \mathbf{X} 代表实际响应量(如位移、应变、应力等),则 \mathbf{X} 在 t_n 时刻的统计特征为

$$\mathbf{X}(t_n) = \sum_{l=0}^N \mathbf{X}(t_n) H_l(\zeta_v) \quad (16)$$

利用标准正交函数系的性质 $H_0(\zeta_v) = 1$ (式(16))可写成

$$\mathbf{X}(t_n) = \sum_{l=0}^N \mathbf{X}(t_n) H_l(\zeta_v) H_l(\zeta_v) \quad (17)$$

对式(17)求数学期望有

$$E[\mathbf{X}(t_n)] = E\left[\sum_{l=0}^N \mathbf{X}(t_n) H_l(\zeta_v) H_l(\zeta_v)\right] = \mathbf{X}_0(t_n) \quad (18)$$

响应的协方差为

$$\text{cov}(\mathbf{X}(t_n), \mathbf{X}(t_n)) = \sum_{l=1}^N \mathbf{X}_l^2(t_n) \quad (19)$$

4 算例及分析

取中孔圆柱形药柱内径 $a = 100\text{mm}$, 外径 $b = 167\text{mm}$, 壳体厚度 $h = 3\text{mm}$, 长度 $L = 200\text{mm}$, 同时认为药柱两端与壳体粘结。药柱壳体材料为钢, 其弹性模量为 $2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, 泊松比为 0.3。固体推进剂松弛模量 $E(t)$ 的 Prony 级数取前三项:

$$E(t) = 3.3231 + 5.8250e^{-t/1} + 1.4974e^{-t/10} + 2.1505e^{-t/100} \quad (20)$$

燃气内压载荷取为指数形式:

$$P(t) = 13.375(1 - e^{-10t}) \quad (21)$$

考虑推进剂泊松比的随机性并假定其服从正态分布, 均值和变异系数分别为 0.495 和 0.003。随机量的正交展开取前 4 项, 将粘弹性谱随机有限元方法的计算结果与 Monte-Carlo 方法比较。点火增压 0.66s 时, 药柱内表面($r = 100\text{mm}$)径向应力应变、环向应力应变的均值和标准差如表 1 所示。

表 1 燃气内压作用下药柱结构随机分析结果

Tab. 1 Random analysis results of grain under gas pressure

计算结果	MCS(10 000 次)	VSSFEM	变异系数(VSSFEM)
径向应变均值	-0.065697	-0.065934	24.85%
径向应变标准差	0.016512	0.016384	
环向应变均值	0.035702	0.035813	21.51%
环向应变标准差	0.0077625	0.0077024	
径向应力均值(MPa)	-13.356	-13.356	0.001%
径向应力标准差(MPa)	0.00015165	0.00015048	
环向应力均值(MPa)	-12.488	-12.485	1.66%
环向应力标准差(MPa)	0.20872	0.20711	

可以看出, 粘弹性谱随机有限元法与 Monte-Carlo 模拟的计算结果非常接近, 二者均值和标准差的差别均在 1% 以内, 说明对于泊松比随机的固体火箭发动机结构响应分析, 正交展开取前 4 项即可获取较高精度的均值估计和方差估计。同时, 表 1 的数据表明, 泊松比随机性对分析结果的影响很大。在泊松比变异系数为 0.003 的情况下, 药柱径向应变变异系数达 24.85%, 后者是前者的 80 多倍。泊松比随机性对应力的影响较小, 主要是因为应力尤其是径向应力主要由载荷(燃气内压)决定。

药柱径向应变均值、标准差及环向应变均值、标准差沿半径变化趋势见图 1 和图 2。

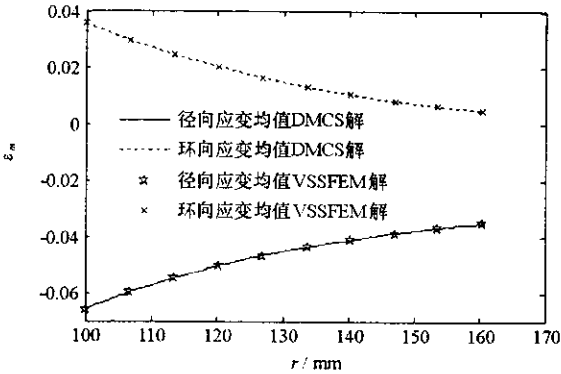


图 1 应变均值沿半径变化

Fig.1 Mean value of strain vs radius coordinate

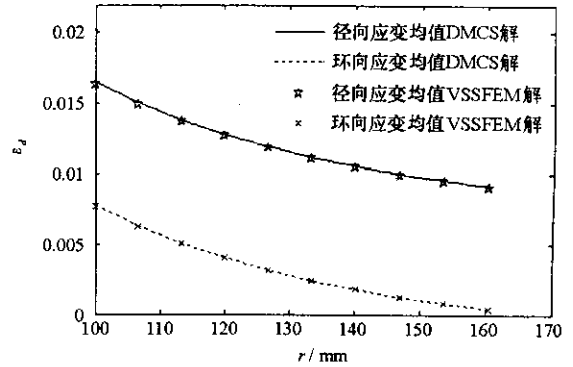


图 2 应变标准差沿半径变化

Fig.2 Standard deviation of strain vs radius coordinate

5 结论

本文将谱随机有限元方法引入到固体火箭发动机结构完整性分析领域,基于不可压和近似不可压粘弹性有限元,发展了一种粘弹性谱随机有限元方法,并用于处理泊松比随机的药柱结构分析问题。文中的算例表明了粘弹性谱随机有限元方法的有效性,同时分析结果表明,泊松比的随机性对应变的影响很大,必须予以考虑。

参考文献:

- [1] 蒙上阳,唐国金,雷勇军. 材料性能对固体发动机结构完整性的影响[J]. 国防科技大学学报,2002,24(5):10-15.
- [2] 陈汝训. 固体火箭发动机设计与研究[M]. 北京:宇航出版社,1992.
- [3] 金伟娅,张康达. 可靠性工程[M]. 北京:化学工业出版社,2005.
- [4] Cost T L. Probabilistic Service Life Prediction of Missile Structures Subjected to Random Thermal Loads[R]. AIAA-1980-406, 1980.
- [5] 张海联,周建平. 粘弹性谱随机有限元[J]. 固体力学学报,2002,23(4):387-395.
- [6] 李杰. 随机结构分析的扩阶系统方法(I) 扩阶系统方程[J]. 地震工程与工程振动,1995,15(3):111-118.
- [7] Jensen H, Iwan W D. Response of Systems with Uncertain Parameters to Stochastic Excitation[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1992, 118(11):1012-1025.
- [8] Herrmann L R. Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by Variational Theorem[J]. AIAA J., 1965, 3(10):1896-1900.
- [9] 胡亚非,王元有,王新华. 不可压缩和近乎不可压缩粘弹性问题的有限单元法[J]. 计算结构力学及其应用,1992,9(4):381-386.
- [10] 李杰. 随机结构系统[M]. 北京:科学出版社,1996.

