文章编号:1001-2486(2006)06-0032-06

具有拟周期外力的非自治发展方程的时滞惯性流形与近似惯性流形[※]

朱健民,李 祥,黄建华

(国防科技大学 理学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:研究了一类具有拟周期外力的非自治发展方程,通过延伸相平面将非自治系统转化为自治系统,再证明相应的自治系统的时滞惯性流形的存在性,并在时滞惯性流形的基础上构造了非自治发展方程的近似惯性流形。

关键词:拟周期外力;时滞惯性流形;近似惯性流形

中图分类号:O175.29 **文献标识码**:A

Inertial Manifolds with Delays and Approximate Inertial Manifolds of a Class of Non-autonomous Evolution Equations with Quasi-periodic Terms

ZHU Jian-min, LI Xiang, HUANG Jian-hua

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract:The present paper deals with the long-time behavior of a non-autonomous evolution equations with quasi-periodic term. Firstly the existence of the inertial manifold with delay of the system was proved by transferring the non-autonomous system to an autonomous system through extending the phase plane. Then the approximate inertial manifold of the system was constructed.

Key words:quasi-periodic term; inertial manifold with delay; approximate inertial manifold

到目前为止,无穷维动力系统的长时间性态已得到了广泛的研究,其中惯性流形、时滞惯性流形和近似惯性流形等都是非常重要的研究对象。对于惯性流形的研究,到目前为止已有许多的结果,如文献[1-3]等。惯性流形反映了耗散型发展方程大小涡分量之间的瞬时作用,即 $q(t)=\Phi(p(t))$,其中 $q(t)$,$p(t)$分别表示 t 时刻的小涡和大涡分量。惯性流形的存在性需要严格的谱间隙条件来保证,这对许多发展方程来说是非常苛刻的,甚至是难以实现的.同时对自然界中的许多微分系统来说,一般要依赖于系统的历史,因此 Debussche A. 和 Temam R. 在文献[8]中提出了时滞惯性流形的概念,即 $q(t)=\Phi(p(t),q(t-T))$,$T>0$。它说明小涡分量的当前值不但依赖于当前大涡分量的值,还依赖于小涡分量某个时间间隔 T 以前的值。相关内容可参见文献[8,10-11]等。近似惯性流形也是有限维光滑流形,并且方程的解轨线在有限的时间内都会进入到它的一个小邻域里,因此在无穷维动力系统长时间形态研究中具有非常重要的意义,同时近似惯性流形的存在性不需要苛刻的谱间隙条件,因此适合更广泛的耗散方程,具体可见文献[13]等。A. Rezounenko[4] 在时滞惯性流形基础上构造了一类自治的时滞半线性抛物方程的近似惯性流形,文献[7]研究了一类具有拟周期外力的非自治发展方程的惯性流形,受文献[4,7,10]等的启发,本文研究文献[7]中的方程的长时间性态,利用时滞惯性流形的概念构造了系统的近似惯性流形。

考虑 Hilbert 空间 H 中的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f(u,t)+g(t)\\ u|_{\tau}=u_{\tau}\in H, \quad \tau\in\mathbf{R}\end{cases} \tag{1}$$

※ 收稿日期:2006-06-23
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571175)
作者简介:朱健民(1963—),男,教授,在职博士生。

A 是 H 上的线性无界自共轭算子，存在 H 的一组正交基 $\{e_k\}$，使得 $Ae_k=\lambda_k e_k$，$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\infty$。假设 $f(u,t):D(A^\alpha)\times R\to H$ 满足 $|f(u,t)-f(v,t)|\leqslant C_M|A^\alpha(u-v)|$，$\forall u,v\in D(A^\alpha)$，$|A^\alpha u|\leqslant M$，$|A^\alpha v|\leqslant M$，同时满足 $|f(u,t)|\leqslant C_1|F_1(u)|$，$C_1>0$，$F_1(u)$ 是 $D(A^\alpha)\to H$ 的有界映射。定义 Banach 空间 J，其加权范数定义为 $|\psi|_J=\sup\limits_{u\in D(A^\alpha)}\dfrac{|\psi(u)|}{|F_1(u)|}$，$\forall\psi\in J$。还假设 $f(u,t)$ 是拟周期函数，且 $f(u,t)\in C_b(R,J)$，其中 $C_b(R,J)$ 为 R 上的 J 值有界函数的全体，即 $f(u,t)=F(u,\alpha t)=F(u,w_1(t),w_2(t),\cdots,w_{k_1}(t))$，且 F 关于每个 w_i 是 2π 周期的，$i=1,2,\cdots,k_1$，$w_i(t)=\alpha_i t$，$\alpha_i\in\mathbf{R}$ 是有理独立的，因此由文献[7]知可定义时间符号空间 $H(f)$ 如下：

$$H(f)=\{F(\alpha_1 t+w_{01},\alpha_2 t+w_{02},\cdots,\alpha_{k_1}t+w_{0k_1}),(w_{01},w_{02},\cdots,w_{0k_1})=w_0\in T^{k_1}\}$$

这里 $H(f)$ 为 $C_b(R,J)$ 中的紧集，且关于平移群 $\{T(h),h\in\mathbf{R}\}$ 是正不变的，即 $T(h)H(f)\subset H(f)$，其中 $T(h)v(t)=v(t+h)$，$\forall v(t)\in H(f)$. 假设 $g(t)$ 也是拟周期函数，且 $g(t)\in C_b(R,H)$，其中 $C_b(\mathbf{R},H)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 H 值有界函数的全体，即

$$g(t)=G(\beta t)=G(w'_1(t),w'_2(t),\cdots,w'_{k_2}(t))$$

G 关于每个 w'_i 是 2π 周期的，$i=1,2,\cdots,k_2$，$(\alpha,\beta)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k_1},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k_2})$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k_1}$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k_2}$ 是有理独立的，因此，同样可定义符号空间 $H(g)$ 如下

$$H(g)=\{G(\beta_1 t+w'_{01},\beta_2 t+w'_{02},\cdots,\beta_{k_2}t+w'_{0k_2}),(w'_{01},w'_{02},\cdots,w'_{0k_2})=w'_0\in T^{k_2}\}$$

$F(u,w)\in C(T^{k_1},J)$ 满足 $|F(u,w)-F(u,\theta)|\leqslant C_2|F_2(u)||w-\theta|$，$\forall w,\theta\in T^{k_1}$，$F_2(u)$ 是 $D(A^\alpha)\to H$ 的有界映射。$G(w')\in C(T^{k_2})$ 满足 $|G(w')-G(\theta')|\leqslant C_3|w'-\theta'|$，$\forall w',\theta'\in T^{k_2}$，$C_3>0$。由文献[9]知可用 $T^k=T^{k_1}\times T^{k_2}$ 替换时间符号空间 $H(f)\times H(g)$。

由文献[7]可知，在某些适当的条件下，对每个 $u_\tau\in D(A^\alpha)$，$\sigma_0\in T^k$，系统(1)有定义在 $[\tau,\infty)$ 上的唯一解 $u(t)=U_{\sigma_0}(t,\tau)u_\tau$，其中 $\{U_\sigma(t,\tau),t\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R},\sigma\in T^k\}$ 是系统(1)所产生的过程簇。过程簇 $\{U_\sigma(t,\tau),t\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R},\sigma\in T^k\}$ 在 $D(A^\alpha)$ 上有一个一致吸引子 R 和一致吸收集 B_0，即对任意有界集 $B\subset E$，$\exists t_0=t_0(B,\tau)>\tau$，使得当 $t\geqslant t_0$ 时，有 $\bigcup\limits_{\sigma\in T^k}U_\sigma(t,\tau)B\subseteq B_0$，$\tau\in\mathbf{R}$。

延伸相平面 $D(A^\alpha)\times T^k$，记 $S(t)(u_0,\sigma_0)=(u_{\sigma_0}(t,0)u_0,T(t)\sigma_0)$，$(u_0,\sigma_0)\in D(A^\alpha)\times T^k$，$t\geqslant0$。由文献[9]知 $\{S(t)\}$ 是一个半群，它是下面自治系统生成的：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=R(u,\sigma(t))\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=(\alpha,\beta)\\[2mm](u(0),\sigma(0))=(u_0,\sigma_0)\end{cases}\tag{2}$$

其中，$R(u,\sigma(t))=F(u,w)+G(w')$，$\sigma(t)=(w(t),w'(t))$，$w(t)=T(t)w_0=(\alpha t+w_0)\bmod(2\pi)^{k_1}$，$w'(t)=T(t)w'_0=(\beta t+w'_0)\bmod(2\pi)^{k_2}$。

1 自治系统(2)的时滞惯性流形的存在性

因为过程簇 $\{U_\sigma(t,\tau),t\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R},\sigma\in T^k\}$ 在 $D(A^\alpha)$ 中有一致吸收集 B_0，故存在 $\rho>0$ 使得 $B_0\subset B(o,\frac{\rho}{2})$($C_E$ 中半径为 $\frac{\rho}{2}$ 的球). 选取 $\theta(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^+,[0,1])$ 满足 $\theta(x)=1$，$0\leqslant x\leqslant1$；$\theta(x)=0$，$x\geqslant2$，$\sup\limits_{x\geqslant0}|\theta'(x)|\leqslant2$。令 $\theta_\rho(x)=\theta(\frac{x}{\rho})$，且 $R_\theta(u,\sigma(t))=\theta_\rho(|A^\alpha u|)R(u,\sigma(t))$，$\forall u\in D(A^\alpha)$，$\forall\sigma\in T^k$。

考虑截断方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = R_\theta(u, \sigma) \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = (\alpha, \beta) \\ (u(0), \sigma(0)) = (u_0, \sigma_0) \end{cases} \tag{3}$$

由文献[7]知

$$\sup_{(u,\sigma)\in D(A^\alpha)\times T^k} |R_\theta(u,\sigma)| \leqslant M_0 \tag{4}$$

$$|R_\theta(u_1,\sigma_1) - R_\theta(u_1,\sigma_2)| \leqslant M_1(|A^\alpha(u_1-u_2)| + |\sigma_1-\sigma_2|) \tag{5}$$

其中,M_0, M_1 为只与 $\alpha, \rho, C_M, C_i(i=1,2,3)$ 相关的常数,下面仍记 $R_\sigma \equiv \mathbf{R}$。

对任意 $N>0$,$P=P_N$ 表示 A 的前 N 个特征向量张成的空间的正交投影,$Q=I-P$,记 A 的第 N 个特征值为 λ,第 $N+1$ 个特征值为 Λ。对于某个 $T>0$,已知 $Pu(0)=y_0\in PD(A^\alpha)$,$Qu(-T)=z_{-T}\in QD(A^\alpha)$,$\sigma\in T^k$,对 $t\in[-T,0]$,有

$$u(t) = e^{-A(T+t)}z_{-T} + \int_{-T}^{t} e^{-(t-s)A}QR(u(s),\sigma(s))ds + e^{-At}y_0 - \int_t^0 e^{-A(t-s)}PR(u(s),\sigma(s))ds \tag{6}$$

再记

$$\Gamma(y_0, z_{-T}, \sigma; u)(t) = e^{-A(T+t)}z_{-T} + \int_{-T}^{t} e^{-(t-s)A}QR(u(s),\sigma(s))ds + e^{-At}y_0 - \int_t^0 e^{-A(t-s)}PR(u(s),\sigma(s))ds \tag{7}$$

则 $u\in C([-T,0], D(A^\alpha))$ 是满足式(6)的解当且仅当 u 是 $\Gamma(y_0, z_{-T}, \sigma; \cdot)$ 的不动点。

对适当的常数 $\mu\geqslant 0$,定义 Banach 空间 $G_\mu = \{u\in C([-T,0], D(A^\alpha)): |u|_\mu = \sup_{t\in[-T,0]} e^{\mu t}|A^\alpha u(t)| < +\infty\}$。显然,对给定的 $T>0$,$y_0\in PD(A^\alpha)$,$z_{-T}\in QD(A^\alpha)$,式(7)定义的映射 $\Gamma(y_0, z_{-T}, \sigma; \cdot)$ 是 $G_\mu \to G_\mu$ 的映射。以下令 $D(A^\alpha)=E$,且记 $|u|_E = |A^\alpha u|$,$\forall u\in E$,其中 $|\cdot|$ 为 Hilbert 空间 H 中的范数。由文献[1]知

$$|A^\alpha e^{-At}P| \leqslant \lambda^\alpha e^{\lambda|t|},\ t\in\mathbf{R};\quad |A^\alpha e^{-At}Q| \leqslant K(t^{-\alpha}+\Lambda^\alpha)e^{-\Lambda t},\quad t>0,\ K>0 \tag{8}$$

定理1 假定 $1\leqslant\dfrac{\Lambda}{\lambda}\leqslant\beta$,$\beta\in(1,2)$ 且 λ,T 满足如下条件

$$\frac{KM_1T^{1-\alpha}}{1-\alpha} + M_1(K\beta^\alpha+1)\lambda^\alpha T < \frac{1}{4} \tag{9}$$

则 $\Gamma(y_0, z_{-T}, \sigma; \cdot)$ 在 G_μ 中存在唯一不动点 $\psi(y_0, z_{-T}, \sigma)$,且满足

$$|\psi(y_0^1, z_{-T}^1, \sigma^1)(0) - \psi(y_0^2, z_{-T}^2, \sigma^2)(0)|_E \leqslant \frac{4}{3}\left(e^{-\lambda T}|z_{-T}^1 - z_{-T}^2|_E + |y_0^1-y_0^2|_E + \frac{1}{4}|\sigma^1-\sigma^2|\right)$$

证明 设 u_1, u_2 是 G_λ 中的任意两个元素,记 $\Delta\Gamma(t) = \Gamma(y_0, z_{-T}, \sigma; u_1)(t) - \Gamma(y_0, z_{-T}, \sigma; u_2)(t)$,$\Delta u(t) = u_1(t) - u_2(t)$,则有

$$|A^\alpha\Delta\Gamma(t)| \leqslant KM_1\int_{-T}^{t}((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^\alpha)e^{-\Lambda(t-s)}|A^\alpha\Delta u(s)|ds + M_1\lambda^\alpha\int_t^0 e^{-\lambda(t-s)}|A^\alpha\Delta u(s)|ds$$

用 $e^{\lambda t}$ 同乘上式,再由已知条件即可得对任给的 $(y_0, z_{-T}, \sigma)\in PE\times QE\times T^k$,$\Gamma(y_0, z_{-T}, \sigma, \cdot)$ 在 G_λ 存在唯一不动点 $\psi(y_0, z_{-T}, \sigma)$。

设 $(y_0^i, z_{-T}^i, \sigma^i)\in PE\times QE\times T^k (i=1,2)$ 是任给的两组参数,$\psi(y_0^i, z_{-T}^i, \sigma^i)\in G_\lambda(i=1,2)$ 是对应的 Γ 的不动点,且记 $\Delta\psi = \psi(y_0^1, z_{-T}^1, \sigma^1) - \psi(y_0^2, z_{-T}^2, \sigma^2)$,由上述证明 Γ 压缩的过程容易看出:$e^{\lambda t}|\Delta\psi(t)|_E \leqslant \frac{1}{4}|\Delta\psi|_\lambda + e^{-T\Lambda}e^{-(\Lambda-\lambda)t}|z_{-T}^1 - z_{-T}^2|_E + |y_0^1-y_0^2|_E + \frac{1}{4}|\sigma^1-\sigma^2|$,这里用到 $|\sigma^1(t)-\sigma^2(t)| = |\sigma^1(0)-\sigma^2(0)|$,$t\in\mathbf{R}$,这是因为 $\dfrac{d|\sigma^1(t)-\sigma^2(t)|}{dt}=0$。从而 $|\Delta\psi(t)|_E \leqslant \frac{4}{3}e^{-\lambda t}$

$(e^{-\lambda T}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E+|y_0^1-y_0^2|_E+\frac{1}{4}|\sigma^1-\sigma^2|)$,此即证明了定理的结论。

注 1 现在对任意的$(y_0,z_{-T},\sigma)\in PE\times QE\times T^k$,记

$$\Psi(y_0,z_{-T},\sigma)=Q\psi(y_0,z_{-T},\sigma)(0) \tag{10}$$

则 $\Psi:PE\times QE\times T^k\to QE$ 就是系统(3)的时滞惯性流形,系统(3)的任何一条轨道都满足式(10)。

定理 2 若 λ,T 满足定理 1 的假设,同时满足:$X_1=KM_1((1-\alpha)^{-1}T^{1-\alpha}+\beta^\alpha\lambda^\alpha T)<\frac{1}{5}$,$M_1\lambda^\alpha T\leqslant\frac{1}{5}$,则对$\forall(y_0^i,z_{-T}^i,\sigma^i)\in PE\times QE\times T^k(i=1,2)$,映射 Ψ 满足:$|\Psi(y_0^1,z_{-T}^1,\sigma^1)-\Psi(y_0^2,z_{-T}^2,\sigma^2)|_E\leqslant\frac{4}{3}e^{-\lambda T}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E+\frac{1}{3}|y_0^1-y_0^2|_E+\frac{1}{3}|\sigma^1-\sigma^2|$。

证明 由定理 1 知,对于任意给定的$(y_0^1,z_{-T}^1,\sigma^1)$和$(y_0^2,z_{-T}^2,\sigma^2)$,$\psi(y_0^1,z_{-T}^1,\sigma^1)(t)$和$\psi(y_0^2,z_{-T}^2,\sigma^2)(t)$是式(6)的解。记$\Delta\psi(t)=\psi(y_0^1,z_{-T}^1,\sigma^1)(t)-\psi(y_0^2,z_{-T}^2,\sigma^2)(t)$,令 $X_2=X_1+\frac{X_1M_1\lambda^\alpha T}{1-M_1\lambda^\alpha T}$,且$1-X_2>0$,则可得

$$|Q\Delta\psi|_\lambda\leqslant\frac{e^{-\lambda T}}{1-X_2}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E+\frac{X_1}{(1-X_2)(1-M_1\lambda^\alpha T)}|y_0^1-y_0^2|_E+\frac{X_2}{1-X_2}|\sigma^1-\sigma^2| \tag{11}$$

再由定理条件即可得证。

注 2 关于定理 1 与定理 2 中 λ,T 的取法如下:取常数 $c>\ln2$,使得$\frac{c}{\lambda}>T>\frac{\ln2}{\lambda}$,再取适当的 λ 使得$\frac{KM_1c^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\lambda^{1-\alpha}}+M_1(K\beta^\alpha+1)\lambda^\alpha\frac{c}{\lambda}\leqslant\frac{1}{4}$,$\frac{KM_1c^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\lambda^{1-\alpha}}+KM_1\beta^\alpha\lambda^\alpha\frac{c}{\lambda}\leqslant\frac{1}{5}$,$M_1\lambda^\alpha\frac{c}{\lambda}\leqslant\frac{1}{5}$,只需 $\lambda^{1-\alpha}\geqslant\tilde{c}$,其中 $\tilde{c}=\max\{\frac{4KM_1c^{1-\alpha}}{1-\alpha}+4M_1(K\beta^\alpha+1)c,\frac{5KM_1c^{1-\alpha}}{1-\alpha}+5M_1K\beta^\alpha c,5M_1c\}$。此时 $e^{-\lambda T}<\frac{1}{2}$,且有$|\Psi(y_0,z_{-T}^1,\sigma)-\Psi(y_0,z_{-T}^2,\sigma)|_E\leqslant\frac{2}{3}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E$。则映射 $\Psi(y_0,\cdot,\sigma):QE\to QE$ 存在唯一的不动点,定义映射 $\Psi^T(p,\sigma)\equiv\Psi(p,z_{-T},\sigma)$,其中 $z_{-T}=\Psi(p,z_{-T},\sigma)$。下节将证明 Ψ 的图像 $\{p+\Psi^T(p,\sigma),\sigma\}\subset E\times T^k$ 为系统(3)的近似惯性流形。

2 过程簇 $\{U_\sigma(t,\tau),t\geqslant\tau,\tau\in R,\sigma\in T^k\}$的近似惯性流形

引理 1[12] 设 $v(t)\geqslant0$ 在$[0,T]$上连续。若存在正的常数 a,b,α,$\alpha<1$,使得当 $t\in[0,T]$时,有

$$v(t)\leqslant a+b\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \tag{12}$$

则存在与 a 无关的常数$L>0$,使得

$$v(t)\leqslant La,\quad t\in[0,T] \tag{13}$$

定理 3 取常数 $c>8\ln2$,使得$\frac{c}{\lambda}>T>\frac{8\ln2}{\lambda}$,并且 $\lambda^{1-\alpha}>\max\{\tilde{c},\frac{20LKM_1c^{1-\alpha}}{1-\alpha}+20LKM_1\beta^\alpha c,M_0K(\frac{2^{2-\alpha}c^{1-\alpha}}{1-\alpha}+2\beta^\alpha c)\}$,则对任意的 $\eta>0$,存在 $N+k$ 维近似惯性流形$\mu=\{p+\Psi^T(p,\sigma),\sigma\}\subset E\times T^k$,使得其 η 邻域吸引系统(3)的任意一条解轨线,即当 $t\geqslant\frac{T}{2}$时,系统(3)的解满足

$$|\Pi S(t)(u_0,\sigma_0)-\Psi^T(P\Pi S(t)(u_0,\sigma_0),\sigma(t))|_E\leqslant2\exp\{-\frac{2}{T}t\ln2\}|Qu(0)-\Psi^T(Pu(0),\sigma_0)|_E+\eta \tag{14}$$

其中,Π 为$E\times T^k\to E$ 的投影算子,$\Pi(u,\sigma)=u$,$(u,\sigma)\in E\times T^k$。

证明 记 $\hat{u}(t)=G_{\sigma_0}(t,0)\hat{u}_0$,$\hat{u}_0\in p+\Psi(p,\sigma_0)$,$(p,\sigma_0)\in PE\times T^k$,因此对系统(3)的任意解

$S(t)(u_0,\sigma_0)=(u(t),\sigma(t))$，有 $Qu(t)-\Psi^T(Pu(t),\sigma(t)) = Q(u(t)-\hat{u}(t))+[Q\hat{u}(t)-\Psi^T(P\hat{u}(t),\sigma(t))]+[\Psi^T(P\hat{u}(t),\sigma(t))-\Psi^T(Pu(t),\sigma(t))]$，其中 $(u_0,\sigma_0)\in E\times T^k$，当 $\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant T$ 时，利用式(11)、定理 2、引理 1 以及 Ψ^T 的 Lipschitz 性质，易得 $|\Psi^T(P\hat{u}(t),\sigma(t))-\Psi^T(Pu(t),\sigma(t))|_E\leqslant\dfrac{\frac{5}{3}X_1}{1-\frac{4}{3}e^{-\lambda T}}L|Q(u_0-\hat{u}_0)|_E$。

下面估计 $Q\hat{u}(t)-\Psi^T(P\hat{u}(t),\sigma(t))$，固定 $t_0\in[0,T]$，令 $w(t)=\hat{u}(t)(t\in[0,t_0])$，$w(t)=v_0(t)(t\in[-T,0])$，其中 $v_0(t)$为式(6)的解，因此有

$$
\begin{aligned}
w(t) = {}& e^{-tA}p+\int_0^t e^{-(t-\tau)A}PR(w(\tau),\sigma(\tau))d\tau+e^{-(t+T)A}\Psi^T(p,\sigma)\\
&+\int_{-T}^t e^{-(t-\tau)A}QR(w(\tau),\sigma(\tau))d\tau
\end{aligned}
$$

此式对 $\forall t\in[-T,t_0]$ 均成立。又 $p=e^{t_0A}Pu(t_0)+\int_{t_0}^0 e^{\tau A}PR(w(\tau),\sigma(\tau))d\tau$，则

$$
\begin{aligned}
w(t) = {}& e^{-(t-t_0)A}Pu(t_0)+\int_{-T}^t e^{-(t-\tau)A}PR(w(\tau),\sigma(\tau))d\tau+\int_{t_0-T}^t e^{-(t-\tau)A}QR(w(\tau),\sigma(\tau))d\tau+\\
& e^{-(t+T)A}\Psi^T(p,\sigma)+\int_{-T}^{t_0-T} e^{-(t-\tau)A}QR(w(\tau),\sigma(\tau))d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Qu(0) &= Qv_0(0)\\
&= e^{-TA}\Psi^T[Pu(0),\sigma(0)+\int^0 t_{-T}e^{\tau A}QR(w(\tau),\sigma(\tau))d\tau]
\end{aligned}
$$

令 v_{t_0} 为下面方程的解

$$
\begin{aligned}
v_{t_0}(t) = {}& e^{-(t-t_0)A}Pu(t_0)+\int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)A}PR(v_{t_0}(\tau),\sigma(\tau))d\tau\\
&+\int_{t_0-T}^t e^{-(t-\tau)A}QR(v_{t_0}(\tau),\sigma(\tau))d\tau+e^{-(t-t_0+T)A}\Psi^T(Pu(t_0),\sigma(t_0))
\end{aligned}
$$

则可得 $\Psi^T(Pu(t_0),\sigma(t_0))=Qv_{t_0}(t_0)$，在 $C(t_0-T,t_0;D(A^\alpha))$中定义

$$|v|_{t_0}\equiv\sup_{t\in[t_0-T,t_0]}\{e^{-\gamma(t_0-t)}|v(t)|_E\}$$

其中，$\gamma\in[\lambda,\Lambda]$，则有

$$
\begin{aligned}
|w(t)-v_{t_0}(t)|_E\leqslant{}&[M_1\lambda^\alpha T+M_1KT^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}+M_1K\Lambda^\alpha T]e^{\gamma(t_0-t)}|w-v_{t_0}|_{t_0}\\
&+e^{-\Lambda(t+T)}|\Psi^T(Pu(0),\sigma(0))|_E+e^{-\Lambda(t-t_0+T)}|\Psi^T(Pu(t),\sigma(t))|_E\\
&+M_0K[(2T)^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}+\Lambda^\alpha T]e^{-\Lambda t}
\end{aligned}
$$

令 $q_1=M_1\lambda^\alpha T+M_1KT^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}+M_1K\Lambda^\alpha T$，$q_2=M_0K[(2T)^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}+\Lambda^\alpha T]$，当 λ，T 满足定理的假设时，有$q_1<\frac{1}{2}$，$q_2<\frac{1}{2}$，再令 $\gamma=\Lambda$，则有

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[t_0-T,t_0]}e^{-\Lambda(t_0-t)}|w(t)-v_{t_0}(t)|_E\leqslant{}&\frac{1}{2}|w-v_{t_0}|_{t_0}+e^{-\Lambda(t_0+T)}|\Psi^T(Pu(0),\sigma(0))|_E\\
&+e^{-\Lambda T}|\Psi^T(Pu(t_0),\sigma(t_0))|_E+\frac{1}{2}e^{-\Lambda t_0}
\end{aligned}
$$

因此$|w-v_{t_0}|_{t_0}\leqslant2e^{-\Lambda(t_0+T)}|\Psi^T(Pu(0),\sigma(0))|_E+2e^{-\Lambda T}|\Psi^T(Pu(t_0),\sigma(t_0))|_E+e^{-\Lambda t_0}$，再由 Ψ^T 的定义知，存在常数 C_R，使得$|\Psi^T(p,\sigma)|_E\leqslant C_R$，$(p,\sigma)\in PE\times T^k$，此时有$|w-v_{t_0}|_{t_0}\leqslant4C_Re^{-\Lambda T}+e^{-\Lambda t_0}$。又 $Q\hat{u}(t_0)-\Psi^T(P\hat{u}(t_0),\sigma(t_0))=Q(w(t_0)-v_{t_0}(t_0))$，故可得$|Q\hat{u}(t)-\Psi^T(P\hat{u}(t),\sigma(t))|_E\leqslant4C_Re^{-\Lambda T}+e^{-\Lambda t}$。综上知，$|Qu(t)-\psi^T(Pu(t),\sigma(t))|_E\leqslant\frac{1}{2}|Q(u_0-\hat{u}_0)|_E+4C_Re^{-\Lambda T}+$

$e^{-\Lambda t}$。上式利用了定理关于 λ, T 的假设。此即可得,当 $t\in[\frac{T}{2},T]$ 时,$d(t)\leqslant\frac{1}{2}d(0)+\xi$,其中 $d(t)=|Qu(t)-\psi^T(Pu(t),\sigma(t))|_E$,$\xi=4C_R e^{-\Lambda T}+e^{-\Lambda\frac{T}{2}}$。于是,令 $t_n=n\frac{T}{2}$,则有 $d(t_{n+1})\leqslant\frac{1}{2}d(t_n)+\xi$,迭代得 $d(t_n)\leqslant(\frac{1}{2})^n d(0)+2\xi$。又对于 $t\in[t_n+\frac{T}{2},t_n+T]$,有 $d(t)\leqslant\frac{1}{2}d(t_n)+\xi$,因此对于所有的 $t\geqslant\frac{T}{2}$ 有 $d(t)=2\exp(-\frac{2}{T}t\ln 2)d(0)+2\xi$,令 $\eta=2\xi$,定理证毕。

定理4 若系统(3)存在近似惯性流形 μ,且 λ, T 满足定理3的假设,则系统(1)存在 N 维近似惯性流形 $\{p+\Psi^T(p,\sigma),(p,\sigma)\in PE\times T^k\}$,即对于任意小的 $\eta>0$,使得 Lipschitz 流形 $\Pi\mu$ 的 η 邻域吸引过程簇 $\{U_\sigma(t,\tau), t\geqslant\tau, \tau\in\mathbf{R},\sigma\in T^k\}$ 的任意一条解轨线 $U_\sigma(t,\tau)u_\tau, t\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R},(u_\tau,\sigma)\in E\times T^k$。

证明 由定理3知自治系统(2)存在近似惯性流形 $\mu=\{(p+\Psi^T(p,\sigma),\sigma),(p,\sigma)\in E\times T^k\}$。下面断言 $\Pi\mu$ 为过程簇 $\{U_\sigma(t,\tau), t\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R},\sigma\in T^k\}$ 的近似惯性流形,其中 $\Pi: E\times T^k\to E$ 为自然投影算子. 事实上 μ 为有限维 Lipschitz 流形,则 $\Pi\mu$ 亦为有限维 Lipschitz 流形。由平移恒等式[9] $U_{T(h)\sigma}(t,\tau)=U_\sigma(t+h,\tau+h)$ 以及式(14)可得 $\Pi\mu$ 对于系统(1)的任一解 $u(t)=U_\sigma(t,\tau)u_\tau, t\geqslant\tau, \tau\in\mathbf{R}$ 的吸引性,因此 $\Pi\mu$ 即为系统(1)的近似惯性流形。

参 考 文 献:

[1] Temam R. Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. NewYork: Springer-Verlag, 1988.

[2] Sell G, You Y. Inertial Manifolds: The Non-self-Adjoint Case[J]. Journal of Differential Equations, 1992, 96: 203-255.

[3] Monvel L, Chueschov I, Rezounenko A. Inertial Manifold for Retard Semilinear Parabolic Equations[J]. Nonlinear Analysis, 1998, 34: 907-925.

[4] Rezouneko A. Approximate Inertial Manifolds for Retarded Semilinear Parabolic Equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 282: 614-628.

[5] Travis C, Webb D. Existence and Stability for Partial Functional Differential Equations[J]. Transactions AMS, 1974, 200: 395-418.

[6] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations[M]. Springer-verlag, New York, Berlin, 1996.

[7] 殷朝阳,赵怡,黄煜. 具有拟周期外力的非自治发展方程的惯性流形[J]. 数学年刊, 2000, 21A(4): 457-470.

[8] Debussche A, Temam R. Inertial Manifolds with Delay[J]. Appl. Math. Lett., 1995, 8: 21-24.

[9] Chepyzhov V, Vishik I. Attractor of Non-autonomous Dynamical Systems and Their Dimension[J]. J. Math. Pure Appl., 1994, 73: 279-333.

[10] 李开泰,侯延仁. 时滞惯性流形及近似时滞惯性流形族[J]. 数学学报, 2000, 43(3): 435-444.

[11] Rezounenko A. Inertial Manifolds with Delay for Retarded Semilinear Parabolic Equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2000, 6(4): 829-840.

[12] 叶其孝,李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[13] 戴正德,郭柏灵. 惯性流形与近似惯性流形[M]. 北京 科学出版社, 2000.