

利用动态规划原理实现多冲量最优交会问题*

刘鲁华, 汤国建, 余梦伦

(国防科技大学 航天与材料工程学院 湖南 长沙 410073)

摘要 :多冲量最优交会问题是航天领域非常重要的一个研究方向,从运筹学角度将此问题转化为一个多阶段多维动态规划问题,并着重对多阶段二维动态规划进行分析研究。在给出状态方程及指标函数递推公式的基础上,得到了两冲量和三冲量交会问题最优解的求解算法,之后分别通过实例验证了算法的有效性。对于以地心角等参数为决策变量的更高维问题,讨论了利用进化算法等降维方法实现多维动态规划的思想。

关键词 :交会 轨道机动 最优化 动态规划 进化算法

中图分类号 :V526 文献标识码 :A

Solving the Optimal Multi-impulse Rendezvous Problem
Based on the Dynamic Programming

LIU Lu-hua, TANG Guo-jian, YU Meng-lun

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :The multi-impulse rendezvous problem is a key research field of astronautics. Firstly, based on the operational research, this problem was converted to a multi-phase-multi-dimension dynamic programming question. Then the multi-phase-two-dimension dynamic programming problem was emphatically analyzed, and the state transfer equations and recursion equations of the performance function were deduced. The solution to the two-impulse and three-impulse problem and the validating examples were given later. In the end, the dynamic programming idea which uses the evolution algorithm to reduce the dimension of the multi-dimension question was introduced.

Key words :rendezvous orbit maneuver optimization dynamic programming evolution algorithm

空间交会对接是实现空间物质能量运输、装配与维护等空间操作必不可少的核心技术,国际上已经进行了多次交会对接工程应用,当前我国也进入了工程计划阶段。随着该技术的不断发展,问题已从解决交会实现转到要求交会任务在某些指标上达到最优。

就最优交会问题来说,国内外学者都给予了高度重视,主要研究方法分为两类:一种是借助优化算法进行数值仿真寻优,如进化算法^[1-3]等,这类方法理论分析能力不够而且计算量很大;另一种是在引力模型线性化^[4-6]条件下实现的最优交会,这类方法计算简单但适用条件苛刻。

针对多冲量交会这一具体问题,提出一种多阶段多维动态规划优化算法,并利用此算法对两冲量和三冲量交会问题进行了计算。

1 问题描述

本文研究的问题描述如下:在与地心距离平方成反比的引力场模型中,研究航天器在给定初始状态下,通过 n 次机动到达预定目标状态,并使这一过程在给定指标

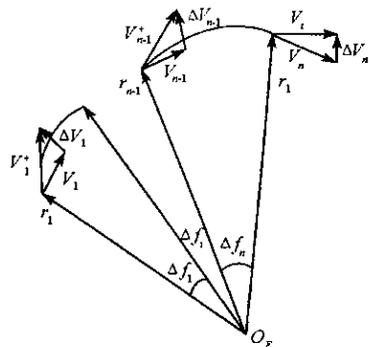
图 1 n 次机动交会示意图

Fig.1 Sketch map of multi-impulse rendezvous

* 收稿日期 2006-04-07
作者简介:刘鲁华(1977-),男,博士生。

函数下性能最优。问题可由图 1 表示,其中 r_1, V_1 为给定的初始位置和速度, r_t, V_t 为目标位置和速度, $\Delta V_1, \Delta V_n$ 分别为初位置与目标位置的速度增量。在初始条件与终端条件都已确定的条件下,交会问题就是一个典型的多阶段多维动态规划问题。每次机动后都可以看成是一个阶段,机动位置的选择,冲量大小及其方向是每个阶段需要制定的策略。当研究空间交会问题时,每阶段都需要确定轨道坐标系速度增量的三个分量,如果每次机动位置不给定,还需要对机动位置进行决策,这是一个四维多阶段动态规划问题;考虑到工程应用中大多采用共面机动,这样可以将问题简化为三维;当给定每阶段的机动位置时,问题将进一步转化为确定径向与周向速度增量的二维问题;当仅考虑在给定位置沿周向变轨的问题时,还可将问题进一步简化。本文主要研究多阶段二维交会问题。

2 多冲量交会问题的动态规划表示

首先建立描述轨道机动问题的坐标系,文中采用的是航天器轨道坐标系:定义坐标原点为航天器质心,地心与原点连线方向为 X 轴方向,称之为径向,用 r 表示关于径向的参数, Y 轴方向在轨道面内垂直于 X 轴且沿速度方向,称之为周向,用 f 表示关于周向的参数,按右手法则确定 Z 轴方向, Z 方向称之为法向。

多冲量交会问题中,选用 $X_i = (r_i, u_i, V_{ri}, V_{fi})$ 作为状态变量, $\Delta V_{ri}, \Delta V_{fi}$ 为决策变量,其中 r_i, u_i, V_{ri}, V_{fi} 分别为第 i 阶段初始矢径、纬度幅角、沿径向与周向的速度, $\Delta V_{ri}, \Delta V_{fi}$ 表示第 i 阶段沿径向与周向的速度增量。这组状态变量与决策变量物理概念明确,可以很清楚地描述问题,如果需要坐标转换也非常方便。

由轨道动力学理论^[7]可以推导出如下形式的状态转移方程:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_{i+1}} = \frac{C_i}{r_i} + \frac{1 - c_i - e_i s_i \sin f_i}{p_i} \\ u_{i+1} = u_i + \Delta f_i \\ V_{r,i+1} = V_{ri}^+ c_i + \frac{\mu}{h_i} e_i s_i \cos f_i \\ V_{f,i+1} = V_{fi}^+ c_i + \frac{\mu}{h_i} (1 - c_i - e_i s_i \sin f_i) \end{cases} \quad (1)$$

其中 h_i, a_i, e_i, f_i, u_i 分别为第 i 阶段轨道的角动量、半长轴、偏心率、真近点角和纬度幅角,式中:

$$c_i = \cos \Delta f_i, \quad s_i = \sin \Delta f_i, \quad V_{ri}^+ = V_{ri} + \Delta V_{ri}, \quad V_{fi}^+ = V_{fi} + \Delta V_{fi} \quad (2)$$

其中 $\cos f_i, \sin f_i$ 的推导如下:

$$h_i = r_i V_{fi}^+ \quad (3)$$

$$a_i = \frac{\mu r_i}{2\mu - r_i (V_{fi}^{+2} + V_{ri}^{+2})} \quad (4)$$

$$e_i = \sqrt{1 - \frac{h_i^2}{\mu a_i}} \quad (5)$$

$$p_i = a_i (1 - e_i^2) \quad (6)$$

$$\sin f_i = \frac{V_{ri}^+ h_i}{\mu e_i} \quad (7)$$

$$\cos f_i = \frac{p_i - r_i}{r_i e_i} \quad (8)$$

指标函数定义为:

$$J_{nk} = \sum_{i=k}^n (|\Delta V_{ri}|^2 + |\Delta V_{fi}|^2), \quad k = 1 \dots n \quad (9)$$

其中,下标第一个数表示机动次数,第二个数表示机动的阶段,则公式(9)表示 n 次机动第 k 阶段需要

满足的最优指标函数。

对给定的初始及目标条件,当 Δf_i 确定后,动态规划的各个阶段就是确定的。由于交会问题对目标点状态也有约束,这相应于一类始端与终端都固定的动态规划问题,仍可以通过动态规划原理求出最优决策 ΔV_{ir} 和 ΔV_{if} , 其中 $i=1, \dots, m$ 。

利用动态规划原理,决策指标函数可以表示为下面的递推形式:

$$J_{nk} = (J_{n(k+1)})_{\min} + |\Delta V_{rk}|^2 + |\Delta V_{fk}|^2, \quad k=1, \dots, m-1 \quad (10)$$

利用公式(1)和(10)可以将 n 阶段优化问题转化为 n 个一阶段优化问题,从未阶段开始递推到第 1 阶段,最终的指标函数 J_{n1} 仅是初始状态与目标状态的函数,可以通过极值原理确定使 J_{n1} 最小的决策变量。由于 $(J_{n(k+1)})_{\min}$ 是 $k+1$ 阶段状态变量的函数,需要通过状态转移方程得到关于第 k 阶段的状态变量。

3 两冲量最优交会求解

3.1 两冲量交会的两种形式

两次冲量交会问题有两种描述形式,第一种形式是在初始点与目标点各加一次冲量,并满足交会条件,第二种形式是在初始点与始末两点中间某点各进行一次变轨,之后经过给定地心角后满足交会条件。

先考虑第一种形式,第二次机动的指标函数如下:

$$J_{22} = |\Delta V_{r2}|^2 + |\Delta V_{f2}|^2$$

因为第二阶段并未进入轨道,故有 $\Delta f_2 = 0$, 于是有 $s_2 = 0, c_2 = 1$, 利用式(1)可得:

$$\Delta V_{r2} = V_{r1} - V_{r2}, \quad \Delta V_{f2} = V_{f1} - V_{f2}$$

接着求解第一次机动的决策变量,此时指标函数如下:

$$J_{21} = |\Delta V_{r1}|^2 + |\Delta V_{f1}|^2 + |V_{r1} - V_{r2}|^2 + |V_{f1} - V_{f2}|^2 \quad (11)$$

显然只要使 J_{21} 最小即可得到第一次机动的速度增量。形式二可以转化为形式一,当目标状态给定后,第二次变轨后的状态即由目标状态确定,通过目标状态可以得到第二次变轨后的状态量,于是问题就转化为第一种形式。多次冲量也会有类似形式二的情况,以下仅对形式一寻求最优解。

3.2 两冲量最优解算法

为了使所求轨道公式(11)的指标函数最小,需要对 J_{21} 关于 ΔV_{r1} 与 ΔV_{f1} 求导。仔细分析不难发现,指标函数隐含了公式(1)中后两个式子,而不包含第一个式子的信息,故指标函数还需要附加这一约束条件,定义此式为 φ , 于是将问题描述为使 J_{21} 最优的一个条件极值问题。本文算法采用 Lagrange 乘子法解条件极值问题,引入 Lagrange 乘子 λ , 将条件极值转化为求下方程的无约束极值问题:

$$L = J_{21} + \lambda \varphi \quad (12)$$

对(12)式关于 $\Delta V_{r1}, \Delta V_{f1}$ 求导并令其为 0, 则有:

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta V_{r1}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \Delta V_{f1}} = 0 \quad (13)$$

联立(13)式和函数 φ , 可以得到下面关于 V_{f1}^+ 的四次函数:

$$g_0 V_{f1}^{+4} + g_1 V_{f1}^{+3} + g_2 V_{f1}^{+2} + g_3 V_{f1}^+ + g_4 = 0 \quad (14)$$

其中:

$$g_0 = 4[s_1^2 + (c_1 - r_1/r_t)^2]$$

$$g_1 = -2s_1[V_{r1} + V_{f1}s_1 + V_{r1}c_1 + (V_{f1}s_1 - V_{r1}c_1 - V_{r1})r_1/r_t]$$

$$g_2 = 0$$

$$g_3 = 2\mu s_1(1 - c_1)(V_{r1} - V_{r1})r_1$$

$$g_4 = -4\mu^2(c_1 - 1)^2/r_1^2$$

解此四次方程(四次方程的求解可以参考常见的数学手册)得 V_{f11}^+ 、 V_{f12}^+ 、 V_{f13}^+ 、 V_{f14}^+ 四个值。将这四个值代入公式得到相应的四个周向速度 ΔV_{f11} 、 ΔV_{f12} 、 ΔV_{f13} 和 ΔV_{f14} ,径向速度 ΔV_{r11} 、 ΔV_{r12} 、 ΔV_{r13} 、 ΔV_{r14} 可由公式(2)(3)(7)获得,具体求解关系如下:

$$\Delta V_{ri} = \frac{\mu(1-c_1) + \left(\frac{c_1}{r_1} - \frac{1}{r_t}\right) \{r_1 V_{f1}^+\}^2}{S_1 r V_{f1}^+} - V_{r1} \quad (15)$$

将虚根剔除后分别代入(11)式,比较最优性即可得最优解。两点边值问题的最优解总是存在的,可以将上式求得多个解代入极值充分条件进行判断,通常并不需要做这一步。最优解的选择也可由工程应用唯一确定。

计算中发现方程的几个系数差异可以达到 10^{20} 量级,为了简化计算并减小求解误差,对位置与速度采用归一化处理,距离以地球参考椭球体的赤道半径 a_e 为单位,时间单位取 $(a_e^3/\mu)^{1/2}$,则地心引力常数 μ 归一化为 1。代入公式(14), g_0 、 g_1 公式形式不变, g_3 、 g_4 表达式变为:

$$g_3 = 2s_1(1-c_1) \{V_{r1} - V_{rt}\} r_1, \quad g_4 = -4(c_1-1)^2/r_1^2$$

3.3 $\Delta f_1 = 180^\circ$ 的情况

如果取 $\Delta f_1 = 180^\circ$,仍然可以利用(14)式求得最优解,此时方程系数简化为:

$$g_0 = 4(c_1 - r_1/r_t)^2, \quad g_4 = -4\mu^2(c_1-1)^2/r_1^2, \quad g_1 = g_2 = g_3 = 0$$

在此条件下可以直接得到:

$$\Delta V_{f1} = \sqrt{\frac{2\mu r_t}{r_1(r_1+r_t)}} - V_{f1} \quad (16)$$

利用公式(7)得到

$$\Delta V_{r1} = -V_{r1} \quad (17)$$

当初始轨道与目标轨道都为圆轨道时,上式得到的转移轨道与霍曼转移一致,这也证明了霍曼转移轨道是能量最优转移轨道。

3.4 两次冲量仿真实例

给定初始条件为椭圆轨道,其中 $r_1 = 6778\text{km}$, $V_{r1} = 0$, $V_{f1} = 7.78929\text{km/s}$,目标位置 $r_t = 6959.728378\text{km}$, $V_{rt} = 0.253114\text{km/s}$, $V_{ft} = 7.605646\text{km/s}$,经过的地心角取 $\Delta f_1 = 77.639^\circ$,利用上面的算法可得:

$$\Delta V_{r1} = 0.058, \quad \Delta V_{f1} = 9.963, \quad \Delta V_{r2} = 0.059, \quad \Delta V_{f2} = 10.042$$

速度增量单位取 m/s 。

4 三冲量最优交会

4.1 三冲量最优解算法

在解决了两冲量最优解的条件下考虑三冲量最优问题,由第三次机动可以确定 ΔV_{r3} 、 ΔV_{f3} 满足:

$$\Delta V_{r3} = V_{rt} - V_{r3}, \quad \Delta V_{f3} = V_{ft} - V_{f3} \quad (18)$$

由第二次机动可以确定 ΔV_{r2} 、 ΔV_{f2} 的值,计算参考 3.2 节。对于第一次机动,指标函数如下:

$$J_{31} = (J_{32})_{\min} + (\Delta V_{r1})^2 + (\Delta V_{f1})^2 \quad (19)$$

可以通过极小化 J_{31} 得到 ΔV_{r1} 、 ΔV_{f1} 。 $(J_{32})_{\min}$ 是 ΔV_{r2} 、 ΔV_{f2} 及 r_2 的函数,其与决策变量 ΔV_{r1} 、 ΔV_{f1} 及第一次变轨的状态变量之间的关系可以由公式(2)确定。需要说明的是 J_{31} 中已经隐含关系式 φ ,所以在求极值时无需再加入这一约束。利用极值条件则有:

$$\frac{\partial J_{31}}{\partial \Delta V_{r1}} = 0, \quad \frac{\partial J_{31}}{\partial \Delta V_{f1}} = 0 \quad (20)$$

由于方程(14)是四阶方程(注意两次与三次机动下标的区别), ΔV_{r2} 、 ΔV_{f2} 通常不能直接写出解析

解,所以 J_{31} 中含有中间变量 ΔV_{r2} 、 ΔV_{f2} 。为了得到最优解,需要利用公式(20) 联立(14) 式及其他一些辅助方程求解,这一联立方程组需要利用数值方法获得。在某些特殊条件下也可以直接导出 J_{31} 与第一次决策变量的显示关系,此时无需联立其他方程,利用公式(20) 可以直接求出使 J_{31} 最小的 ΔV_{r1} 、 ΔV_{f1} 。

4.2 $\Delta f_i = 180^\circ$ 的情况

当三次冲量间的轨道地心角都取 180° 时,方程求解相对比较容易,第三次机动决策由公式(18) 确定,第二次机动可用公式(16) (17) 直接求解,于是 $J_{32 \min}$ 完全由初末条件及第一次机动决策变量显示表示。联立方程(20) 可以确定最优解,通常这两个方程比较复杂,本文不具体列出,需要利用数值运算获得。

4.3 三次冲量仿真实例

初始条件为圆轨道,其中 $r_1 = 7000\text{km}$, $V_{r1} = 0$, $V_{f1} = 7.546053\text{km/s}$, 目标位置 $r_t = 13803.450985\text{km}$, $V_{rt} = 0$, $V_{ft} = 5.373720\text{km/s}$, 经过的地心角都取 180° , 利用三次冲量算法可得:

$$\Delta V_{r1} = \Delta V_{r2} = \Delta V_{r3} = 0, \quad \Delta V_{f1} = 0.584431\text{km/s}$$

$$\Delta V_{f2} = 1.078556\text{km/s}, \quad \Delta V_{f3} = 0.493882\text{km/s}$$

5 问题的进一步探讨

利用动态规划求解二维问题,当冲量次数增加时,优化算法会比较复杂,同时运算量也会增大,需要借助计算机仿真手段进行求解。对于三维以上问题的求解则需要首先考虑降维处理的问题,当前可供采用的降维方法很多,主要有拉格朗日乘子法^[8]、逐次逼近法,网格法和进化算法等。由于交会动力学表现出严重的非线性,利用后三种方法更为有效,文献[9] 采用了网格法进行降维处理,这种方法对离散决策集可行,但对连续决策集计算量比较大而且只能在给定离散决策集下得到最优解。如果采用进化算法则可以进行全局寻优,当考虑地心角不定的平面多阶段交会问题时,可以对地心角的 Δf_i 决策采用进化算法编码,而对每阶段的冲量大小采用动态规划直接求解。这样每次决策过程只要给定一组地心角编码,就可以采用动态规划原理确定出其他决策值,通过进化特性最终取得多维问题的优化解。

6 结论

本文在平面交会问题中采用多阶段多维动态规划原理研究了在假定地球模型下多冲量交会问题的最优解,给出了一套计算该问题的通用算法,并具体推导了二冲量与三冲量问题的最优解求解算法,最后对考虑地心角决策的多维决策问题的解决方法进行了一些探讨。研究可以得到以下结论与启示:

- (1) 文中选择的状态变量与决策变量物理背景明确,便于表述与坐标转换。
- (2) 两冲量能量最省最优交会问题的解可以通过解一个四次方程求得。
- (3) 对于三次以上冲量最优解问题,采用动态规划原理完全可行,但求解过程比较复杂,需要借助计算机数值计算完成。
- (4) 指标函数的形式可以按照要求适当改变,如以时间为最优性能指标、以速度增量绝对值或者时间与速度增量复合形式为指标。
- (5) 可以采用进化算法与动态规划相结合的方法解决多阶段多维动态规划问题。

参考文献:

- [1] 王华,唐国金.用遗传算法求解双冲量最优交会问题[J].中国空间科学技术,2003,23(1):26-30.
- [2] 刘鲁华,等.基于进化算法的空间交会最优轨道机动[A].第十一届空间及运动体控制技术学术会议[C],云南丽江,2004.
- [3] Mason W J, et al. Optimal Earth Orbiting Satellite Constellations Via a Pareto Genetic Algorithm[R]. AIAA-98-4381,1988.
- [4] 潘科炎.飞船的双冲量最优交会[J].航天控制,1991,(2):14-22.
- [5] Carter T E, Sergio A A. Four-impulse Rendezvous near Circular Orbits[C]. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Boston, MA,1998.
- [6] Shen H J. Optimal Scheduling for Satellite Refuelling in Circular Orbits[D]. Georgia Institute of Technology,2003.
- [7] 任萱.人造地球卫星轨道力学[M].长沙:国防科技大学出版社,1988.
- [8] 李维铮,等.运筹学(上)[M].北京:清华大学出版社,1982.
- [9] 谌颖,黄文虎,倪茂林,等.多冲量最优交会的动态规划方法[J].宇航学报,1993,14(2):1-7.

