

## 时域电场积分方程中的奇异提取技术\*

周东明,刘 锋,蔡明娟,任 猛,何建国

(国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

**摘 要** :介绍了一种基于奇异提取技术的时域积分方程中奇异积分的处理方法,在奇异提取过程中,电磁波传播的延迟效应对积分的贡献包含在内。数值实验表明该方法能够大幅提高自作用和近作用阻抗矩阵元素的计算精度。

**关键词** :奇异积分;时域电场积分方程;阻抗矩阵

**中图分类号** :TB115 **文献标识码** :A

## Singularity Extraction Technique for TD-EFIE

ZHOU Dong-ming, LIU Feng, CAI Ming-juan, REN Meng, HE Jian-guo

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** :A time domain singularity extraction technique is presented to calculate singular integrals in time domain electric field integral equation solver. In singularity extraction procedure, the time-retardation effects in time domain integrals are included. Numerical examples demonstrate that the presented method can greatly increase the accuracy of calculation of the self-interaction and near-interaction impedance matrix elements.

**Key words** :singular integral; time domain electric field integral equation; impedance matrix

时域积分方程法常用来解决瞬态电磁场问题,比如导体、介质体的时域散射问题,或者天线的时域辐射特性<sup>[1-3]</sup>。在运用时域矩量法求解时域积分方程时,表面的未知电流展开成一系列时间基函数和空间函数积的和。时间基函数常为多项式函数,空间基函数则几乎都采用 RWG 函数<sup>[4]</sup>。在计算阻抗矩阵中的自作用和近作用元素时,会遇到奇异积分,而自作用和近作用阻抗元素对方程组的求解结果影响较其他元素要大,所以需要采取合适的处理方法。计算阻抗矩阵元素的积分中,时间和空间变量是通过电磁波传播的迟滞时间变量联系在一起的,为了简化计算,通常假设时间基函数在积分区域内的数值变动不大<sup>[5]</sup>,这种假设实际上是非常勉强的,因为时间基函数通常定义在 1~4 个步长内,而积分区域内迟滞时间的变化通常也在 1~4 个时间步长内,也就是说在整个积分单元上(通常是三角形片)时间基函数的取值从最大到最小都有可能。本文给出一种奇异处理的方法,能够将迟滞时间对积分的贡献包含在内,从而给出自作用和近作用元素的精确结果。数值实验证明了本文方法的有效性。

## 1 时域积分方程

设  $S$  表示任意形状导体散射体的表面,在入射电场  $E^i(\mathbf{r}, t)$  的照射下感应出表面电流  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 。根据导体表面的电场切向分量为零这一边界条件,可以写出下面的差分型电场积分方程。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\tan}^i(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla \int_S \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' \right] \Big|_{\tan} \quad (1)$$

其中,  $R$  是观察点  $\mathbf{r}$  到源点  $\mathbf{r}'$  之间的距离,  $\tau = t - R/c$  为电磁波传播的迟滞时间,  $c$  为电磁波在该媒质中的传播速度,  $\mu$  和  $\epsilon$  分别为该媒质的磁导率和介电常数。

\* 收稿日期:2006-04-10  
基金项目:国家部委基金资助项目  
作者简介:周东明(1976-),男,博士生。

采用时间递推方法(Marching-on-in-time, MOT)求解式(1)时需要将未知电流进行空间和时间离散,即将 $J(\mathbf{r}', \tau)$ 表示为一系列空间基函数和时间基函数乘积的和,也就是

$$J(\mathbf{r}, t) \cong \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N I_n^j f_n(\mathbf{r}) T_j(t) \quad (2)$$

其中,  $T(t)$  和  $f(\mathbf{r})$  分别为时间和空间基函数,  $N$  为空间基函数的数量。本文的空间基函数采用被广泛使用的 RWG 基函数。时间基函数采用文献[6]给出的时间基函数, 该时间基函数在定义域任意连续可导, 定义为

$$T_j(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{t-j\Delta t}{\Delta t}\right), & |t-j\Delta t| \leq \Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

在时刻  $t = j\Delta t$  对方程(2)进行伽略金检验, 得到下面的线性方程组

$$\bar{\mathbf{Z}}_0 \cdot \mathbf{I}_j = \mathbf{V}_j^{exc} - \sum_{l=1}^{j-1} \bar{\mathbf{Z}}_l \cdot \mathbf{I}_{j-l} \quad (4)$$

其中,

$$\mathbf{V}_{j,m}^{exc} = f_m(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

$$\mathbf{Z}_{l,mn} = f_m(\mathbf{r}) \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_n} \frac{T_{j-l}(\tau) f_n(\mathbf{r}')}{R} dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_{S_n} \frac{\nabla' \cdot (T_{j-l}(\tau) f_n(\mathbf{r}'))}{R} dS' \quad (6)$$

在任何条件下(5)式的积分都不存在奇异, 所以可直接采用数值积分方法来计算。(6)式的计算涉及到下面两种积分

$$I_1 = \int_{T_m} f_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_n} \frac{T_{j-l}(\tau) f_n(\mathbf{r}')}{R} dS' \quad (7)$$

$$I_2 = \int_{T_m} \nabla \cdot f_m(\mathbf{r}) \int_{T_n} \frac{\nabla' \cdot [T_{j-l}(\tau) f_n(\mathbf{r}')] }{R} dS' \quad (8)$$

(7)和(8)式中的外层积分不存在奇异问题, 所以常采用三角形区域上的高斯积分来计算, 而内层积分在观察三角形和源三角形重合或者邻近时会出现奇异或者近奇异, 此时不适合直接采用数值积分方法来计算。

利用空间基函数的定义及其面散度的表达式<sup>[4]</sup>和矢量恒等式  $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{a}$ , 忽略(7)和(8)式内层积分的常数项, 我们把最终需要处理的奇异积分写成

$$I'_1 = \int_{T_n} \frac{T(\tau) (\mathbf{r}' - \mathbf{q})}{R} dS' \quad (9)$$

$$I'_2 = \int_{T_n} \frac{T(\tau) + \hat{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{q}) T(\tau) \mathcal{Y}_c}{R} dS' \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{q}$  为三角形的自由定点。

## 2 奇异提取方法

首先构造下面的等式

$$T_{j-l}(\tau) = [T_{j-l}(\tau) - \sum_{n=0}^{N_1} \frac{(\tau-t)^n}{n!} T_{j-l}^{(n)}(t)] + \sum_{n=0}^{N_1} \frac{(\tau-t)^n}{n!} T_{j-l}^{(n)}(t) \quad (11)$$

$$T'_{j-l}(\tau) = [T'_{j-l}(\tau) - \sum_{n=0}^{N_2} \frac{(\tau-t)^n}{n!} T_{j-l}^{(n+1)}(t)] + \sum_{n=0}^{N_2} \frac{(\tau-t)^n}{n!} T_{j-l}^{(n+1)}(t) \quad (12)$$

$$T''_{j-l}(\tau) = [T''_{j-l}(\tau) - \sum_{n=0}^{N_3} \frac{(\tau-t)^n}{n!} T_{j-l}^{(n+2)}(t)] + \sum_{n=0}^{N_3} \frac{\tau^n}{n!} T_{j-l}^{(n+2)}(t) \quad (13)$$

其中,  $T^n(\tau) = (\partial^n / \partial t^n) T(t) |_{t=\tau}$ 。将(11)(12)和(13)式代入(9)和(10)式,并利用等式  $\tau = t - R/c$  可得到下面的式子

$$I'_1 = \int_{T_n} \frac{[T'(\tau) - \sum_{n=0}^{N_3} (\frac{-R}{c})^n \frac{1}{n!} T_{j-l}^{n+2}(t)]}{R} (r' - q) dS' + (-1)^n \frac{T_{j-l}^{n+2}(t)}{c^{n+1}} \int_{T_n} \sum_{n=0}^{N_3} \frac{1}{n!} R^{n-1} (r' - q) dS' \quad (14)$$

$$I'_2 = \int_{T_n} \frac{[T(\tau) - \sum_{n=0}^{N_1} (\frac{-R/c}{n!}) T_{j-l}^n(t)]}{R} dS' + \int_{T_n} \frac{[T'(\tau) - \sum_{n=0}^{N_2} (\frac{-R/c}{n!}) T_{j-l}^{n+1}(t)]}{cR} \hat{R} \cdot (r' - q) dS' + \frac{T_{j-l}^n(t) (-1)^n}{c^n} \int_{T_n} \sum_{n=0}^{N_1} \frac{1}{n!} R^{n-1} dS' + (-1)^n \frac{T_{j-l}^{n+1}(t)}{c^{n+1}} \int_{T_n} \sum_{n=0}^{N_2} \frac{1}{n!} R^{n-1} \hat{R} \cdot (r' - q) dS' \quad (15)$$

当  $R \rightarrow 0$  时,积分  $I'_1$  的第一项和  $I'_2$  的前面两项中被积函数的分子为  $R$  的高阶无穷小量,因此被积函数在积分区域是非常平滑的,数值积分可以给出精确的结果。 $I'_1$  和  $I'_2$  的其他部分可以解析求解<sup>[7-8]</sup>。

由上面的奇异提取过程可以看出,将时间基函数的前面有限项非零泰勒级数减去,然后加上,这样将积分分解成两部分,第一部分跟迟滞时间  $\tau$  有关,但是无奇异,第二部分跟迟滞时间无关且可以解析求解。

### 3 计算结果

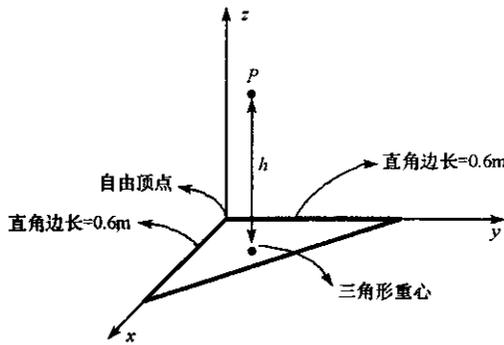


图1 数值计算所用的几何参数  
Fig. 1 Geometrical parameters of the numerical experiment

为了验证本文方法的有效性,我们采用三种方法计算了检验时刻  $t = (j - l) \Delta t$  时 ( $\Delta t = 3.33\text{ns}$ ) 的  $|I'_1|$  和  $I'_2$ , 此时  $T_{j-l}^n((j - l) \Delta t) = T_{j-l}^n(0)$ , 当  $n$  为奇数时,  $T_{j-l}^n(0) = 0$ 。如图1所示,观察点  $P$  位于源三角形重心的上面,高度为  $h$ 。第一种方法为目前广泛使用的方法<sup>[9]</sup>, 列出使用的公式:

$$I'_1 = T'(\tau_{mn}) \int_{T_n} \frac{r' - q}{R} dS' \quad (16)$$

$$I'_2 = T(\tau_{mn}) \int_{T_n} \frac{1}{R} dS' \quad (17)$$

其中,迟滞时间  $\tau_{mn}$  近似取为  $t - R_{mn}/c$ ,  $R_{mn}$  为观察点和源三角形中心之间的距离。第二种方法采用本文的奇异提取方法,取  $N_1 = 0, N_2 = 1$  和  $N_3 = 0$ , 也就是只加减  $T(\tau), T'(\tau)$  和  $T''(\tau)$  第一项非零的泰勒级数项。第三种方法取  $N_1 = 2, N_2 = 3$  和  $N_3 = 2$ , 也就是只加减  $T(\tau), T'(\tau)$  和  $T''(\tau)$  前两项非零的泰勒级数项。第二、三种方法中的数值积均采用三角形上16点高斯积分计算。参考结果采用收敛判定

门限为  $10^{-10}$  的 Romberg 数值积分获得。图 2 表明第一种方法精度较低, 通过从时间基函数中提取泰勒级数项可将数值积分函数变得平滑, 从而获得较高的精度。显然, 提取的级数项越多, 获得的精度越高, 但是必将提高计算的复杂程度, 实际使用过程中提取两项已能满足工程计算的需要。

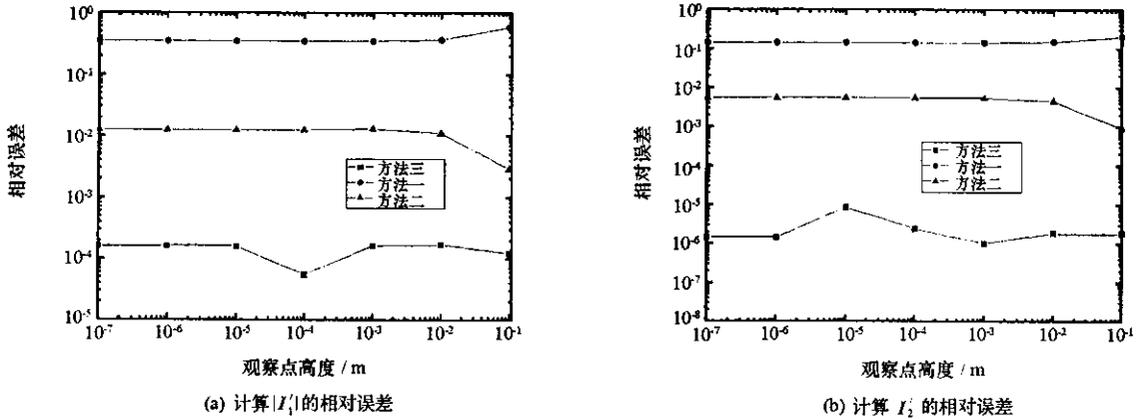


图 2 三种方法计算  $|I'_1|$  和  $I'_2$  的相对误差的比较

Fig. 2 Comparison of the relative error of  $|I'_1|$  and  $I'_2$  calculated by three methods

## 4 结论

提取时域电场积分方程中的时间基函数的低阶泰勒级数项, 可将计算阻抗矩阵自作用项和近作用相中的奇异和近奇异积分分成可数值计算的无奇异部分和可解析计算的奇异部分, 等同于将电磁场传播的迟滞时间变量的影响计算在内, 从而获得高精度的阻抗矩阵的计算结果。同时, 给出进一步提高计算精度的可选方法, 增加从时间基函数中提取泰勒级数项的数目。所给方法提高了计算精度, 但是增加了用计算机计算的时间消耗, 所幸, 只有在计算自作用和近作用时才会采取这样的方法, 所以增加的计算消耗在整个阻抗矩阵的计算中的比重并不大。数值实验验证了所给方法的有效性。

## 参考文献:

- [1] Walker S P. Development in Time-domain Integral-equation Modelling at Imperial College[J]. IEEE Antennas Propag. Mag., 1997, 39: 7-19.
- [2] Vechinski D A, Rao S M, Sarkar T K. Transient Scattering from Three Dimensional Arbitrarily Shaped Bodies[J]. J. Opt. Soc. Am. A., 1994, 11(4): 1458-1470.
- [3] Rynne B P. Time Domain Scattering from Dielectric Bodies[J]. Electromagn., 1994, 14: 181-193.
- [4] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic Scattering by Surface of Arbitrary Shap[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1982, 30(3): 409-417.
- [5] Jung B H, Sarkar T K, Salazar-Palma M. Time Domain EFIE and MFIE Formulations for Analysis of Transient Electromagnetic Scattering from 3-D Dielectric Objects[J]. Progress in Electromagnetics Research, PIER, 2004(49): 113-143.
- [6] Hu J L, Chan C H. Improved Temporal Basis Function for Time Domain Electric Field Integral Equation Method[J]. Electronics Letters, 1999, 35(11): 883-884.
- [7] Wilton D R, Rao S M, Glisson A W, et al. Potential Integrals for Uniform and Linear Source Distributions on Polygonal and Polyhedral Domain[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1984, 32(3): 276-281.
- [8] Ylä-Oijala P, Taskinen M. Calculation of CFIE Impedance Matrix Elements with RWG and nXRWG Functions[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 2003, 51(August): 1183-1846.
- [9] Rao S M, Wilton D R. Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shap[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1991, 39(1): 56-61.

