

计算介质体瞬态散射矩阵元素方法的改进*

蔡明娟,周东明,刘锋,任猛,何建国

(国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南长沙 410073)

摘要 针对求解均匀介质的瞬态电磁散射问题,采用基于 MOT 的方法求解 Müller 方程来分析,对分析中矩阵元素的积分求解,提出了一种奇异分离方法。该方法考虑了时间项延迟的影响,减小了计算中的近似,提高了计算精度。验证表明,和原算法相比,新算法在近奇异处理上的误差很小。

关键词 均匀介质 瞬态电磁散射 MOT 奇异分离

中图分类号 :TB115 **文献标识码** :A

Improvement of Computing Matrix Elements in Analyzing
Transient Scattering of Dielectric Bodies

CAI Ming-juan, ZHOU Dong-ming, LIU Feng, REN Meng, HE Jian-guo

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract To analyze the transient scattering of homogeneous dielectric bodies, the Müller equations with MOT method were chosen. A singularity-extraction technique was presented to calculate the integrals of matrix elements, which considers the time delay effect. It could reduce the approximate value and improve the accuracy. The calculation specifies that the new method has lower-level errors in near singularity than the common method.

Key words homogeneous dielectric transient electromagnetic scattering MOT singularity-extraction

用 marching-on-in-time (MOT)^[1]方法求解均匀介质的瞬态散射,其特点是将时域积分方程化为矩阵方程求解。阻抗矩阵中的元素求解涉及到一些积分,其被积函数含有空间变量和时间变量。当场点和源点比较相近时,它们之间的距离趋近零,积分趋于奇异。此时积分求解得是否准确,直接关系到结果的准确性。通常的做法是将时间基函数中的空间变量用空间点所在的三角形的质心点来代替^[1-3],从而将时间基函数从被积函数中分离出来,使得积分易于求解。这种近似作法忽略了时间项在不同点的时间延迟,计算结果会引入较大的误差。目前,有文献提出磁场积分方程的奇异提取技术^[4],但此方法不适合用于均匀介质散射的问题。对于这种情况,本文针对在选用 Müller 方程来求解均匀介质瞬态散射时矩阵中的积分处理,提出了一种奇异分离的方法,减少了时间项的近似对于结果产生的影响,和常用方法相比,计算误差比较小。

1 求解过程

假设在均匀媒质 1 中存在的媒质 2 为均匀介质体,介质表面为 S 。入射波为一时间有限信号,即有 $\omega = \omega_{\max}$,并且 $\forall r \in S$ 当 $t < 0$ 时入射波为零。根据 Müller 方程,入射场、散射场和等效电流源、等效磁流源之间有如下关系^[5]:

$$-\hat{n}(\mathbf{r}) \times [E_1^{inc}(\mathbf{r}_1, t) + \alpha E_2^{inc}(\mathbf{r}_2, t)] = (1 + \alpha)M(\mathbf{r}, t) + \hat{n}(\mathbf{r}) \times ([E_1^{scat}(\mathbf{r}_1, t) - \alpha E_2^{scat}(\mathbf{r}_2, t)]KJ, M) \quad (1)$$

$$-\hat{n}(\mathbf{r}) \times [H_1^{inc}(\mathbf{r}_1, t) + \beta H_2^{inc}(\mathbf{r}_2, t)] = -(1 + \beta)J(\mathbf{r}, t) + \hat{n}(\mathbf{r}) \times ([H_1^{scat}(\mathbf{r}_1, t) - \beta H_2^{scat}(\mathbf{r}_2, t)]KJ, M) \quad (2)$$

* 收稿日期 2006-04-15

作者简介 蔡明娟(1977—),女,博士生。

其中 $\alpha = \epsilon_2/\epsilon_1, \beta = \mu_2/\mu_1, \epsilon_q, \mu_q (q=1, 2)$ 分别为媒质 q 中的介电常数和磁导率。为了能够数值地求解式(1)和(2),将等效电流源 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 和等效磁流源 $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ 分别作时间和空间上的离散,即

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_t} J_{j,m} T_j(t) \mathbf{S}_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_t} M_{j,m} T_j(t) \mathbf{S}_n(\mathbf{r}) \quad (3)$$

在本文研究中,将空间基函数 $\mathbf{S}_n(\mathbf{r})$ 选为经典的 RWG 基函数^[6],

$$\mathbf{S}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Gamma_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Gamma_n^- \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (4)$$

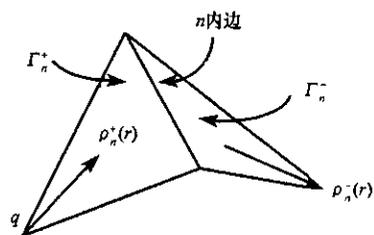


图1 RWG函数示意图
Fig.1 Structure of RWG function

其中 l_n 为 n 内边的长度, A_n^\pm 为三角形 Γ_n^\pm 的面积,如图1所示。

图1中 q 点是 n 内边对应的一个自由顶点。时间基函数有多种选择,此处选取时间的二阶基函数,这方便于下面计算中的时间项求导,具体为

$$T(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2\Delta t^2} + \frac{3t}{2\Delta t} + 1, & -\Delta t \leq t \leq 0 \\ \frac{-t^2}{\Delta t^2} + 1, & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{t^2}{2\Delta t^2} - \frac{3t}{2\Delta t} + 1, & \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (5)$$

并且 $T_j(t) = T(t - j\Delta t)$, 其中 Δt 为时间步长。为了求得式(3)中的未知系数 $J_{j,m}$ 和 $M_{j,m}$, 将式(3)代入式(1)和(2),并用 $\mathbf{S}_n(\mathbf{r})$ 进行空间 Galerkin 测试,就可以得到一组方程来求解。求解过程可以用矩阵表示为

$$\bar{\mathbf{Z}}_0 \mathbf{I}_j = \mathbf{F}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \bar{\mathbf{Z}}_i \mathbf{I}_{j-1} \quad (6)$$

其中 $\bar{\mathbf{Z}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_i^{em} & \bar{\mathbf{Z}}_i^{ej} \\ \bar{\mathbf{Z}}_i^{hm} & \bar{\mathbf{Z}}_i^{hj} \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_j = [M_{j,1} \dots M_{j,N_s} \quad J_{j,1} \dots J_{j,N_s}]^T$ 为 j 时刻的式(3)中的未知系数, \mathbf{F}_j 和入射场有关,其值为 $\mathbf{F}_j = [\mathbf{F}_j^e \mid \mathbf{F}_j^h]^T$, $\mathbf{F}_j^e = \mathbf{S}_m(\mathbf{r}), -\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times [\partial_t \mathbf{E}_1^{inc}(\mathbf{r}, t) + \alpha \partial_t \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}, t)] \big|_{t=t_j}$, $\mathbf{F}_j^h = \mathbf{S}_m(\mathbf{r}), -\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times [\partial_t \mathbf{H}_1^{inc}(\mathbf{r}, t) + \beta \partial_t \mathbf{H}_2^{inc}(\mathbf{r}, t)] \big|_{t=t_j}$ 。

在矩阵元素 $\bar{\mathbf{Z}}_i^{em}, \bar{\mathbf{Z}}_i^{ej}, \bar{\mathbf{Z}}_i^{hm}$ 和 $\bar{\mathbf{Z}}_i^{hj}$ 的表述中,存在三种积分需要求解:

$$I1 = \mathbf{S}_m(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \int_S dS [\mathbf{S}_n(\mathbf{r}') \times \mathbf{R} \frac{\partial_t T_{-i}(\tau)}{R^2}] \quad (7)$$

$$I2 = \mathbf{S}_m(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \int_S dS [\mathbf{S}_n(\mathbf{r}') \times \mathbf{R} \frac{T_{-i}(\tau)}{R^3}] \quad (8)$$

$$I3 = \mathbf{S}_m(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \int_S dS [\mathbf{S}_n(\mathbf{r}') \frac{\partial_t T_{-i}(\tau)}{R}] \quad (9)$$

其中,时间基函数中的 $\tau = t - R/c, R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 是场点 \mathbf{r} 和源点 \mathbf{r}' 之间的距离, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ 是场点所在三角形的单位法向量。

2 积分的求解

当场点向源点逼近,即 $R \rightarrow 0$ 时,式(7)~(9)中的内层积分中被积函数的分母趋近于零,于是积分

变得敏感而会有奇异性。当场点和源点位于同一个三角形时,由于 $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{S}_n(\mathbf{r}') \times \mathbf{R} = 0$, 所以 I_1 和 I_2 不存在绝对奇异。对于(9)式积分,常常采用位势积分(Potential Integrals)^[7]来计算内层积分。对于式(7)~(9)中时间项中 $\tau = t - R/c$ 的处理,通常是取 $\tau = t - R_{mn}/c$, 其中 $R_{mn} = |\mathbf{r}_c - \mathbf{r}'_c|$, \mathbf{r}_c 和 \mathbf{r}'_c 分别为场点 \mathbf{r} 和源点 \mathbf{r}' 所在的三角形的质心。可以看到,这种近似降低了积分难度,但同时也带了一定的误差。为了避免这种误差,本文提出下面的处理方法。

将 $\mathbf{S}_n(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}$ 中的矢量乘积作分解,

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{q} + \mathbf{q} - \mathbf{r}') = (\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{q})$$

其中, \mathbf{q} 是 \mathbf{r}' 所在三角形的自由顶点。于是,对内层的积分,略去常数项,有三种形式的积分需要计算:

$$\begin{cases} I_1' = \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{\partial_t T_-(\tau)}{R^2} \right] \\ I_2' = \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{T_-(\tau)}{R^3} \right] \\ I_3' = \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{\partial_t T_-(\tau)}{R} \right] \end{cases}$$

现在把时间项作分解,写为:

$$I_1' = \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{\partial_t T_-(\tau) - (-\frac{R}{c}) \partial_t^2 T_-(t)}{R^2} \right] - \frac{1}{c} \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{\partial_t^2 T_-(t)}{R} \right] \quad (10)$$

$$I_2' = \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{T(\tau) - T(t)}{R^3} \right] + \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{T(t)}{R^3} \right] \quad (11)$$

$$I_3' = \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{\partial_t T(\tau) - \partial_t T(t)}{R} \right] + \int_S dS' \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{q}) \frac{\partial_t T(t)}{R} \right] \quad (12)$$

此时,式(10)~(12)中的第一项积分可以用高斯积分计算,第二项积分中的时间基函数只与时间有关,而与场点和源点无关,积分可以用位势积分求得。这样,参与计算的时间项产生的结果影响就准确得多。

3 结果比较

为了验证上面提出的方法,本文在两个邻近三角形域上计算了式(7)~(9)。两个三角形相对位置随其夹角 α 变化而变化,如图2所示。给出了常用方法和本文方法数值计算结果与精确解的相对误差,其中参考解是用数学软件计算所得。相对误差表示为

$$\text{Relative_Error}(\alpha) = \left| \frac{\text{Data}(\alpha) - \text{Data}_{\text{exact}}(\alpha)}{\text{Data}_{\text{exact}}(\alpha)} \right|$$

图3给出了误差曲线,可以看出本文方法的相对误差随角度 α 的变化比较一致,其相对误差比常用方法的要小,这说明采用本文方法可以提高计算精度。

4 小结

用 MOT 方法计算均匀介质时域散射时,要求解若干矩阵元素的积分,本文提出了一种新的时间项提取方法计算矩阵元素积分中的时间项,将时间项的作用作了分离,考虑了时间项延迟的影响,避免了常用方法中忽略时间延迟的影响而产生的误差,提高了积分的精度。算例证明了这种方法的有效性。在计算电磁兼容方面需要高精度的结果时,文中所提出的方法是很有效的。

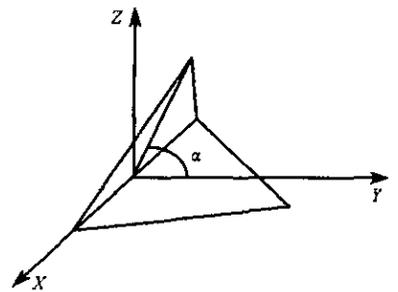


图2 两个三角形的位置
Fig. 2 Position of two triangles

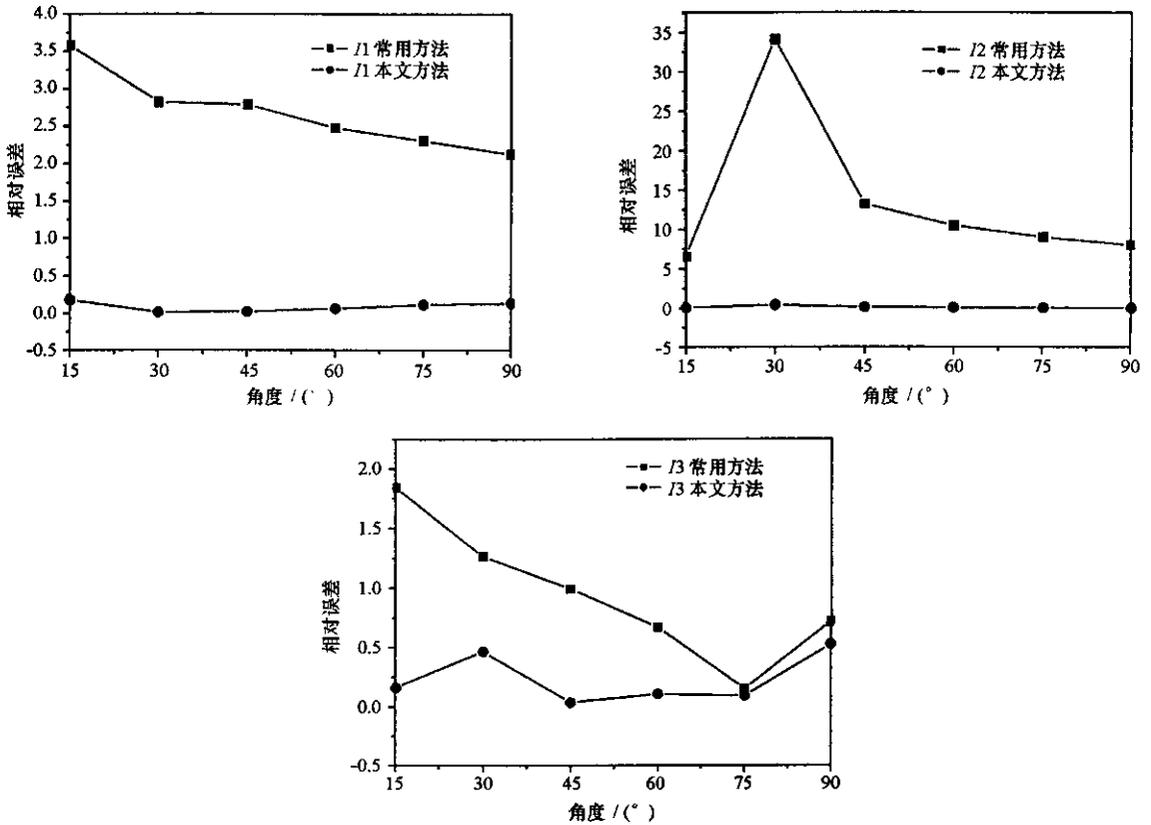


图3 相对误差的比较

Fig.3 Comparison of relative errors

参考文献:

- [1] Rao S M, Wilton R D. Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1991, 39(1):56-61.
- [2] Jung B H, Sarkar T K. Transient Scattering from Three-dimensional Conducting Bodies by Using Magnetic Field Integral Equation [J]. J. of Electromagn. Waves and Appl., 2002, 16(2):111-128.
- [3] Vechinski D A, Rao S M. A Stable Procedure to Calculate the Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1992, 40:661-665.
- [4] Güral L, Özgür E. Singularity of the Magnetic-field Integral Equation and its Extraction [J]. IEEE Antennas Wireless Propagation Letters, 2005, 4:229-232.
- [5] Shanker B, Ergin A A, Michielssen E. Plane-wave-time-domain-enhanced Marching-on-in-time Scheme for Analyzing Scattering from Homogeneous Dielectric Structures [J]. J. Opt. Soc. Am. A., 2002, 19(4):716-726.
- [6] Rao S M, Wilton R D, Glisson A W. Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1982, 30:408-418.
- [7] Wilton R D, Rao S M, Glisson A W, et al. Potential Integrals for Uniform and Linear Source Distributions on Polygonal and Polyhedral Domains [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1984, 32(3):276-281.
- [8] 董健, 柴顺连, 毛俊杰. 结合多层快速多极和 ILUT 预处理算法分析复杂目标的电磁特性 [J]. 国防科技大学学报. 2005, 27(6):82-87.

