文章编号:1001-2486(2007)01-0091-05

构造二维正交紧支撑线性相位小波滤波器的递推算法*

粟塔山,吴　翊
(国防科技大学 理学院,湖南 长沙　410073)

摘　要 根据二维小波滤波器参数化理论,提出了一个具有可操作性的二维小波滤波器递推算法。用最简形式刻画了 4 阶标准正交中心对称矩阵,并证明了根据算法产生的线性相位滤波器的一个重要性质。

关键词 参数化二维正交小波滤波器;中心对称矩阵

中图分类号:TN911.7　　**文献标识码**:A

The Algorithm for the Construction of Two-dimensional Finite Wavelet Filter with Linear Phase

SU Ta-shan,WU Yi
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract:In terms of the formulated finite wavelet filters theory, this paper presented an iterating algorithm for the construction of two-dimensional finite wavelet filter with linear phase. The real unitary and center - symmetry matrices with size of were characterized and an important attribute of wavelet filter produced by the algorithm was proved.

Key words:formulated two-dimensional finite wavelet filters;center-symmetry matrices

二维小波滤波器的理论相对于一维滤波器薄弱一些,尤其是如何按实际问题的技术要求构造出适合的二维小波滤波器,是一个难点。简单的方法是利用两个一维小波滤波器作乘积,但正如文献[1]中所指出,这种可分滤波器有令人遗憾的缺点,例如,方向的选择性比较差,对水平方向和竖直方向比较好,对其他方向就不敏感。现在,二维小波滤波器的理论和应用都有了长足的进展[2-7]。构造二维小波滤波器的的主流方法是矩阵扩展,但是这种方法对特定的问题依赖于特定的技巧,构造的滤波器数量品种有限,构造的复杂度比较高。Si-long Peng 提出了二维(N 维)小波滤波器参数化构造方式[8],给定一组参数,就能得到一个二维小波滤波器;适当选择参数,还能使它具有线性相位,本文第 1 节简要介绍了这一参数化理论的主要结果。但是,究竟如何由给定的参数得到滤波器的系数,需要可操作性的计算格式。更重要的是,只有适当地刻画了参数集,使其产生的滤波器能遍历到所有可能的滤波器,才能根据实际应用中对滤波器的技术要求作出参数的选择。本文用最简形式刻画了 4 阶标准正交中心对称矩阵,根据参数化理论提出了一个具有可操作性的二维小波滤波器递推算法,并证明了根据算法产生的线性相位滤波器的一个重要性质。

1　二维正交小波参数化理论

记平面单位圆上的复变量 $z_1=e^{i\xi_1}$,$z_2=e^{i\xi_2}$,考虑 $N=2s+1$ 次实系数二元多项式

$$m(z_1,z_2)=\sum_{j,k=0}^{N}h_{jk}z_1^j z_2^k$$

定义 1　如果 $m(z_1,z_2)$满足性质

$$\begin{cases}|m(z_1,z_2)|^2+|m(-z_1,z_2)|^2+|m(z_1,-z_2)|^2+|m(-z_1,-z_2)|^2=1\\ m(1,1)=1\end{cases}$$

则称 $m(z_1,z_2)$为 N 阶二维正交紧支撑小波滤波器。进一步,如果存在正整数 p,q,使得

* 收稿日期:2006-09-05
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60673090)
作者简介:粟塔山(1961—),男,副教授,在职博士生。

$$\overline{m(z_1,z_2)} = \pm z_1^p z_2^q \cdot m(z_1,z_2)$$

则称 $m(z_1,z_2)$具有线性相位。

定理1 给定正整数 s,记 $D(z_1^2,z_2^2)=\mathrm{diag}(1\quad z_1^2\quad z_2^2\quad z_1^2z_2^2)$,$\rho=(1\quad 1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$。对任意的4阶标准正交阵 $U_k(k=1,\cdots,s)$,作二元多项式

$$m(z_1,z_2) = \frac{1}{4}(1\quad z_1\quad z_2\quad z_1z_2)\left(\prod_{k=s}^{1}(U_kD(z_1^2,z_2^2))\right)\left(\prod_{k=1}^{s}U_k^T\right)\rho$$

则 $m(z_1,z_2)$是 $N=2s+1$ 阶的二维正交紧支撑小波滤波器。进一步,如果 $U_k(k=1,\cdots,s)$是中心对称矩阵,则 $m(z_1,z_2)$具有线性相位。

定理1中的 $m(z_1,z_2)$是低通滤波器,按照文献[8]也能很容易得到三个高通滤波器。定理1中的参数化公式有 s 个可选的标准正交阵,可以构造出一大类二维正交紧支撑小波滤波器。

实际应用时通常需要选择满足某些条件的小波滤波器,或者用小波滤波器去逼近某个给定的滤波器,并最终得到 $m(z_1,z_2)$中的系数 $\{h_{jk}\}_{j=0,\cdots,N}^{k=0,\cdots,N}$。这就需要解决两个问题,其一,如何选择 $U_k(k=1,\cdots,s)$能遍历定理1中所有的 $m(z_1,z_2)$;其二,如何从选定的这些 $U_k(k=1,\cdots,s)$计算出 $\{h_{jk}\}_{j=0,\cdots,N}^{k=0,\cdots,N}$。

考虑到很多实际问题中都要求 $m(z_1,z_2)$具有线性相位,所以本文就 $U_k(k=1,\cdots,s)$为标准正交且中心对称的情形解决上述两个问题。

2 四阶标准正交且中心对称矩阵的刻画

文献[8]用6个参数刻画一个4阶标准正交且中心对称的矩阵,从而,要遍历定理1中所有线性相位的 $m(z_1,z_2)$需要 $6s$ 个参数。本文用2个参数刻画一个4阶标准正交且中心对称的矩阵,从而只需 $2s$ 个参数达到同样的目的。参数个数的降低对滤波器的选择和优化逼近是很有意义的。

4阶中心对称矩阵必有如下形式

$$U=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ h & g & f & e\\ d & c & b & a\end{pmatrix} \tag{1}$$

它有8个可选参数。再要求 U 为标准正交,故必须

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=1, e^2+f^2+g^2+h^2=1, ad+bc=0\\ eh+fg=0, ae+bf+cg+dh=0, ah+bg+cf+de=0\end{cases} \tag{2}$$

考察4维空间单位球面上的坐标变换

$$x_1=\cos\alpha\cos\beta, x_2=\cos\alpha\sin\beta, x_3=\sin\alpha\cos\gamma, x_4=\sin\alpha\sin\gamma \tag{3}$$

其中,$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant\beta,\gamma<2\pi$. 可以验证,上述变换是长方体$[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi)\times[0,2\pi)$到4维空间单位球面的一对一映射。令

$$\begin{cases} a=\cos\alpha_1\cos\beta_1\\ b=\cos\alpha_1\sin\beta_1\\ c=\sin\alpha_1\cos\gamma_1\\ d=\sin\alpha_1\sin\gamma_1\end{cases}\quad \begin{cases} e=\cos\alpha_2\cos\beta_2\\ f=\cos\alpha_2\sin\beta_2\\ g=\sin\alpha_2\cos\gamma_2\\ h=\sin\alpha_2\sin\gamma_2\end{cases} \tag{4}$$

那么(2)式等价于

$$\begin{cases} \sin2\alpha_1\sin(\beta_1+\gamma_1)=0\\ \sin2\alpha_2\sin(\beta_2+\gamma_2)=0\\ \cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos(\beta_1-\beta_2)+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos(\gamma_1-\gamma_2)=0\\ \cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin(\beta_1+\gamma_2)+\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin(\gamma_1+\beta_2)=0\end{cases} \tag{5}$$

通过分别讨论(α_1,α_2)定义域$[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$的内点部分和四条边界，可得(5)式的通解。

定理 2 用于构造二维非直积滤波器的四阶标准正交中心对称矩阵的可用形式有四类矩阵

$$U=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \pm\sin\alpha\cos\beta & \mp\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \mp\cos\alpha\cos\beta & \pm\cos\alpha\sin\beta \\ \pm\cos\alpha\sin\beta & \mp\cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ \mp\sin\alpha\sin\beta & \pm\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$U=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \pm\sin\alpha\cos\beta & \mp\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \pm\cos\alpha\cos\beta & \mp\cos\alpha\sin\beta \\ \mp\cos\alpha\sin\beta & \pm\cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta \\ \mp\sin\alpha\sin\beta & \pm\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$U=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \pm\sin\alpha\cos\beta & \mp\sin\alpha\sin\beta \\ \pm\cos\alpha\sin\beta & \mp\cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \mp\cos\alpha\cos\beta & \pm\cos\alpha\sin\beta \\ \mp\sin\alpha\sin\beta & \pm\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$U=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \pm\sin\alpha\cos\beta & \mp\sin\alpha\sin\beta \\ \mp\cos\alpha\sin\beta & \pm\cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \pm\cos\alpha\cos\beta & \mp\cos\alpha\sin\beta \\ \mp\sin\alpha\sin\beta & \pm\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \tag{9}$$

3 滤波器的递推算法

本节考虑对给定的正整数 s 和 4 阶标准正交矩阵 $U_k(k=1,\cdots,s)$，如何按照定理 1 中 $m(z_1,z_2)$ 表达式计算出滤波器 $m(z_1,z_2)$的系数 $H=(h_{jk})_{j=0,\cdots,N}^{k=0,\cdots,N}$，由此形成递推算法。

引入记号

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}(\prod_{k=1}^{s} U_k^T)\rho,\text{其中 } \rho=(1\quad 1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}} \\ A_0(z_1,z_2)=\lambda=(\lambda_1\quad\lambda_2\quad\lambda_3\quad\lambda_4)^{\mathrm{T}} \\ A_r(z_1,z_2)=(\prod_{k=r}^{1} U_k D(z_1^2,z_2^2))\lambda,r=1,\cdots,s \end{cases} \tag{10}$$

那么

$$m(z_1,z_2)=(1\quad z_1\quad z_2\quad z_1z_2)A_s(z_1,z_2)$$

再记

$$\begin{cases} Z_1^{(r)}=(1\quad z_1^2\quad\cdots\quad z_1^{2r})^{\mathrm{T}},Z_2^{(r)}=(1\quad z_2^2\quad\cdots\quad z_2^{2r})^{\mathrm{T}},r=0,\cdots,s \\ H^{(0,1)}=(\lambda_1),H^{(0,2)}=(\lambda_2),H^{(0,3)}=(\lambda_3),H^{(0,4)}=(\lambda_4) \end{cases} \tag{11}$$

引理 1 对于 $r=0,\cdots,s$，存在 $r+1$ 阶矩阵 $H^{(r,v)}$，$v=1,2,3,4$，使得

$$A_r(z_1,z_2)=\begin{pmatrix} z_1^{(r)\mathrm{T}}H^{(r,1)}Z_2^{(r)} \\ z_1^{(r)\mathrm{T}}H^{(r,2)}Z_2^{(r)} \\ z_1^{(r)\mathrm{T}}H^{(r,3)}Z_2^{(r)} \\ z_1^{(r)\mathrm{T}}H^{(r,4)}Z_2^{(r)} \end{pmatrix} \tag{12}$$

证明 （用归纳法不难证明，略）

由引理 1 可知，为计算 $m(z_1,z_2)$，重要的是先得到四个矩阵 $H^{(s,v)}$，$v=1,2,3,4$。为明确起见，总结如下：

算法 1 由 s 标准正交矩阵计算二维正交小波滤波器。

step0 给定正整数 s 及标准正交阵 $U_k(k=1,\cdots,s)$。置

$$\rho=(1\quad 1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}},\lambda=\frac{1}{4}\Big(\prod_{k=1}^{s}U_k^{\mathrm{T}}\Big)\rho$$

$$H^{(0,1)}=(\lambda_1),H^{(0,2)}=(\lambda_2),H^{(0,3)}=(\lambda_3),H^{(0,4)}=(\lambda_4)$$

step1 对 $r=0,1,\cdots,s-1$,递推执行

step1.1

$$\widetilde{H}^{(r+1,1)}=\begin{pmatrix}H^{(r,1)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{H}^{(r+1,3)}=\begin{pmatrix}0 & H^{(r,3)}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{H}^{(r+1,2)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ H^{(r,2)} & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{H}^{(r+1,4)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & H^{(r,4)}\end{pmatrix}$$

step1.2 记 $U_{r+1}=(u_{vt}^{(r+1)})_{v,t=1,2,3,4}$,计算 $H^{(r+1,v)}=\sum_{t=1}^{4}u_{vt}^{(r+1)}\widetilde{H}^{(r+1,t)}$,$v=1,2,3,4$

递推完成后得到 $H^{(s,v)}$,$v=1,2,3,4$,它们是 $s+1$ 阶方阵。

定理 3 给定正整数 s 及标准正交阵 $U_k(k=1,\cdots,s)$,按照算法 1 得到 $H^{(s,v)}$,$v=1,2,3,4$ 后,那么二维正交小波滤波器

$$m(z_1,z_2)=\sum_{j,k=0}^{2s+1}h_{jk}z_1^jz_2^k$$

的系数为

$$h_{jk}=\begin{cases}h_{pq}^{(s,1)},\text{当 } j=2p,k=2q\\ h_{pq}^{(s,2)},\text{当 } j=2p+1,k=2q\\ h_{pq}^{(s,3)},\text{当 } j=2p,k=2q+1\\ h_{pq}^{(s,4)},\text{当 } j=2p+1,k=2q+1\end{cases}\qquad j,k=0,1,\cdots,2s+1$$

证明 由引理 1,我们有

$$m(z_1,z_2)=\sum_{j,k=0}^{s}h_{jk}^{(s,1)}z_1^{2j}z_2^{2k}+z_1\sum_{j,k=0}^{s}h_{jk}^{(s,2)}z_1^{2j}z_2^{2k}+z_2\sum_{j,k=0}^{s}h_{jk}^{(s,3)}z_1^{2j}z_2^{2k}+z_1z_2\sum_{j,k=0}^{s}h_{jk}^{(s,4)}z_1^{2j}z_2^{2k}$$

比较 $m(z_1,z_2)$ 的多相表达即知结论成立。 [证毕]

因为已经刻画了 4 阶标准正交中心对称矩阵,所以我们能给出可操作性的线性相位滤波器递推算法。U 的参数化形式可取(6)~(9)式中的任何一种(下面的算法中,以(8)式为例)。

算法 2 线性相位正交小波滤波器递推算法。

step0 给定整数 $s\geqslant 1$,给定 $\alpha=(\alpha_1\quad\cdots\quad\alpha_s)^{\mathrm{T}}$,$\beta=(\beta_1\quad\cdots\quad\beta_s)^{\mathrm{T}}$,满足

$$0\leqslant\alpha_i\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\beta_i<2\pi,i=1,\cdots,s$$

step1 对 $k=1,\cdots,s$ 计算

$$a_k=\cos\alpha_k\cos\beta_k,b_k=\cos\alpha_k\sin\beta_k,c_k=\sin\alpha_k\cos\beta_k,d_k=-\sin\alpha_k\sin\beta_k$$

按(8)式形成 s 个标准正交中心对称矩阵 U_k。

step2 取 $\rho=(1\quad 1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$,计算 $\lambda=\frac{1}{4}\Big(\prod_{k=1}^{s}U_k\Big)\rho$

step3 取 4 个初始一阶矩阵

$$H^{(0,1)}=(\lambda_1),H^{(0,2)}=(\lambda_2),H^{(0,3)}=(\lambda_3),H^{(0,4)}=(\lambda_4)$$

对 $r=0,\cdots,s-1$,循环 step3.1 和 step3.2:

step3.1 给 $H^{(r,v)}(v=1,2,3,4)$分别加上"零边"得 $\widetilde{H}^{(r+1,v)}(v=1,2,3,4)$

$$\widetilde{H}^{(r+1,1)}=\begin{pmatrix}H^{(r,1)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{H}^{(r+1,3)}=\begin{pmatrix}0 & H^{(r,3)}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{H}^{(r+1,2)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ H^{(r,2)} & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{H}^{(r+1,4)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & H^{(r,4)}\end{pmatrix}$$

step3.2 对 $\widetilde{H}^{(r+1,v)}(v=1,2,3,4)$作四种线性组合,得 $H^{(r+1,v)}(v=1,2,3,4)$。

$$H^{(r+1,1)}=a_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,1)}+b_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,2)}+c_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,3)}+d_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,4)}$$
$$H^{(r+1,2)}=b_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,1)}-a_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,2)}-d_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,3)}+c_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,4)}$$
$$H^{(r+1,3)}=c_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,1)}-d_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,2)}-a_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,3)}+b_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,4)}$$
$$H^{(r+1,4)}=d_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,1)}+c_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,2)}+b_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,3)}+a_{r+1}\widetilde{H}^{(r+1,4)}$$

递推完成后得到 $H^{(s,v)}$,$v=1,2,3,4$。

step4 形成 $N=2s+2$ 阶的二维正交线性相位滤波器矩阵 $H=(h_{jk})_{j,k=0}^{2s+1}$:

$$h_{jk}=\begin{cases} h_{pq}^{s,1}, \text{当 } j=2p, k=2q \\ h_{pq}^{s,2}, \text{当 } j=2p+1, k=2q \\ h_{pq}^{s,3}, \text{当 } j=2p, k=2q+1 \\ h_{pq}^{s,4}, \text{当 } j=2p+1, k=2q+1 \end{cases}$$

最后我们将证明,由算法 2 产生的滤波器系数矩阵 H 是中心对称矩阵。

引理 2 由算法 2 的 step2 产生的 λ 满足 $\lambda_1=\lambda_4$,$\lambda_2=\lambda_3$(与 U_k 取哪种形式无关)。

证明 (用归纳法不难证明,略)

引理 3 算法 2 中 step3 最后得到的 $H^{(s,v)}$,$v=1,2,3,4$,满足

$$h_{s-p\,s-q}^{(s,4)}=h_{pq}^{(s,1)},\quad h_{s-p\,s-q}^{(s,1)}=h_{pq}^{(s,4)},\quad h_{s-p\,s-q}^{(s,3)}=h_{pq}^{(s,2)},\quad h_{s-p\,s-q}^{(s,2)}=h_{pq}^{(s,3)} \tag{13}$$

证明 (由引理 2 和归纳法不难证明,略)

定理 4 算法 2 得到的滤波器系数矩阵 H 是中心对称矩阵。

证明 注意到 $N=2s+1$,再根据定理 3 和引理 3 的结论(13)即知,$\forall\, 0\leqslant j,k\leqslant N$,

(1) 当 $j=2p$,$k=2q$ 时,

$$h_{N-j\,N-k}=h_{2(s-p)+1\;2(s-q)+1}=h_{s-p\,s-q}^{(s,4)}=h_{pq}^{(s,1)}=h_{jk}$$

(2) 当 $j=2p+1$,$k=2q$ 时,

$$h_{N-j\,N-k}=h_{2(s-p)\;2(s-q)+1}=h_{s-p\,s-q}^{(s,3)}=h_{pq}^{(s,2)}=h_{jk}$$

(3) 当 $j=2p$,$k=2q+1$ 时,

$$h_{N-j\,N-k}=h_{2(s-p)+1\;2(s-q)}=h_{s-p\,s-q}^{(s,2)}=h_{pq}^{(s,3)}=h_{jk}$$

(4) 当 $j=2p+1$,$k=2q+1$ 时,

$$h_{N-j\,N-k}=h_{2(s-p)\;2(s-q)}=h_{s-p\,s-q}^{(s,1)}=h_{pq}^{(s,4)}=h_{jk}$$

所以,H 是中心对称矩阵。 [证毕]

参 考 文 献:

[1] He W J,Lai M J. Construction of Bivariate Compactly Supported Biorthogonal Box Spline Wavelets with Arbitrarily High Regularities, Applied Comput. Harmonic Analysis, 1999,6:53-74.

[2] Han B,Jia R Q. Optimal C^2 Two-dimensional Interpolatory Ternary Subdivision Schemes with Two-ring Stencils[J]. Mathematics of Computation, 2006,75:1287-1308.

[3] Ali S T, Krasowska A E, Murenzi R. Wigner Functions from the Two-dimensional Wavelet Group[J]. J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis.,2000,17(12):2277-2287.

[4] Bockhorn H, Frohlich J, Schneidet K. An Adaptive Two-dimensional Wavelet-vaguelette Algorithm for the Computation of Flame Balls [J]. J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis.,2000,17(12):2277-2287.

[5] Ali S T, Krasowska A E, Murenzi R. Wigner Functions from the Two-dimensional Wavelet Group[J]. J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis.,2000,17(12):2277-87.

[6] Goirand E, Wickerhauser M V, Farge M. A Parallel Two-dimensional Wavelet Packet Transform and Some Spplications in Computing and Compression Analysis[M]//Motard R, Joseph B. Applications of Wavelet Transforms in Chemical Engineering Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995:275-319.

[7] Gonnet C, Torr'esani B. Local Frequency Analysis with Two-dimensional Wavelet Transform[J]. Signal Processing, 1994:389-404.

[8] Peng S L. N Dimensional Finite Wavelet Filter[J]. Journal Computational Mathematic, 2003,21(5).