文章编号:1001-2486(2007)01-0126-05

一类时滞微分方程正周期解的存在性*

陈吉美,李志祥,王　晓

(国防科技大学 理学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:讨论了一类生物模型正周期解的存在性问题,利用 Mawhin 延拓定理得到了系统存在正周期解的一个充分条件。而且,当系统为无穷时滞时,结论也是成立的。

关键词:周期解;时滞;迭合度

中图分类号:O175.1　　**文献标识码**:A

The Existence of Positive Periodic Solution for a Differtial Equation with Delay

CHEN Ji-mei,LI Zhi-xiang,WANG Xiao

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract:The positive periodic solutions of a biological model with delay were disscussed. One Sufficient condition of the existence of positive periodic solutions was obtained by using the continuation theorem of Mawhin's coincidence degree. In addition, the result on the case with infinite delay was proved to be true.

Key words:periodic solution; delay; coincidence degree

周期解的存在性是泛函微分方程理论研究中的一个重要方面,而对生物模型周期解的研究,不仅有着重要的理论意义,而且也有着重要的现实意义。

文献[1]研究了下面的周期 Lotak-volterra 竞争系统。

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)\left[r_1(t) - a_1(t)u(t) - b_1(t)\int_{-T}^{0} B_1(s)u(t+s)\mathrm{d}s - c_1(t)\int_{-T}^{0} C_1(s)v(t+s)\mathrm{d}s\right] \\ v'(t) = v(t)\left[r_2(t) - a_2(t)v(t) - b_2(t)\int_{-T}^{0} B_2(s)v(t+s)\mathrm{d}s - c_2(t)\int_{-T}^{0} C_2(s)u(t+s)\mathrm{d}s\right] \end{cases} \tag{1}$$

获得了系统至少存在一个正周期解的充分条件,其中 ω, T 为正常数,$B_i, C_i \in C([-T,0],(0,\infty))$ 且有 $\int_{-T}^{0} B_i(s)\mathrm{d}s = 1$,$\int_{-T}^{0} C_i(s)\mathrm{d}s = 1$,$i = 1,2$,$a_i, b_i, c_i \in C(R;[0,\infty))$,$r_i \in C(R;R)$,$i = 1,2$ 是 ω-周期函数。

但在现实生活中,许多生态工作者观察到这样一种现象:种群通过产生植物间抑制物质毒素,可能会影响其他种群数量的增长,随着季节的变化会交替产生影响。文献[2]在两种群 Lotka-volterra 竞争系统中,通过假设每一个种群产生毒素对一个存在产生影响,从而建立如下系统:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[r_1(t) - a_1(t)u(t) - b_1(t)v(t) - c_1(t)u(t)v(t)] \\ v'(t) = v(t)[r_2(t) - a_2(t)v(t) - b_2(t)u(t) - c_2(t)v(t)u(t)] \end{cases} \tag{2}$$

我们知道,一个种群只有成熟后才能产生对别的种群有毒的物质,即竞争系统植物间抑制物质不是即时的,因此文献[3]研究了下面系统

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[r_1(t) - a_1(t)u(t) - b_1(t)v(t) - c_1(t)u(t)v(t-\tau(t))] \\ v'(t) = v(t)[r_2(t) - a_2(t)v(t) - b_2(t)u(t) - c_2(t)v(t)u(t-\tau(t))] \end{cases} \tag{3}$$

* 收稿日期:2006-09-04
作者简介:陈吉美(1963—),男,副教授,在职硕士生。

考虑到种群间产生毒素的相互影响,联系系统(1),我们将研究下面系统的周期解的存在性问题:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[r_1(t) - a_1(t)u(t) - b_1(t)\int_{-T}^{0} B_1(s)u(t+s)\mathrm{d}s - c_1(t)u(t)\int_{-T}^{0} C_1(s)v(t+s)\mathrm{d}s] \\ v'(t) = v(t)[r_2(t) - a_2(t)v(t) - b_2(t)\int_{-T}^{0} B_2(s)v(t+s)\mathrm{d}s - c_2(t)v(t)\int_{-T}^{0} C_2(s)u(t+s)\mathrm{d}s] \end{cases} \tag{4}$$

其中,$a_i, b_i, c_i \in C(R;[0,\infty))$,$r_i \in C(R;R)$,$i=1,2$,如系统(1)所示。考虑到生物模型的实际情况,选择如下的初始条件:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in C([-T,0];(0,\infty)\times(0,\infty)),\phi(0)>0,\psi(0)>0 \tag{5}$$

显然,在初始条件(5)下,系统(4)的任何解都是正的。

为了行文方便,我们引入下面符号。对于一个连续的 ω - 周期函数 $f(t)$,定义

$$\bar{f} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)\mathrm{d}t \quad 和 \quad \bar{f}^* = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} |f(t)|\mathrm{d}t$$

1 Mawhin 延拓定理

为了得到系统(4)正周期解的存在性,首先引入两个定义。

定义 1[4] 设 X, Z 为实的 Banach 空间,$L: DomL \subset X \to Z$ 为线性算子,如果核 $KerL$ 是有限维的,值域 ImL 是闭的,商空间 Z/ImL 是有限维的,则称 L 为 Fredholm 算子。

定义 2[4] 设 L 为 Fredholm 算子,则其 Fredholm 指标为 $IndL = \dim(KerL) - \dim(z/ImL)$。若 $IndL = 0$,则称 L 是指标为零的 Fredholm 算子。

如果 L 为指标为零的 Fredholm 算子,则存在连续投影 $P: X \to X$ 及 $Q: Z \to Z$ 使得 $ImP = KerL$,$KerQ = ImL$,则 $L|_{DomL \cap KerP}: DomL \cap KerP \to ImL$ 是一一对应的,从而可逆,令其连续逆为 K_P。设 $N: X \to Z$ 是连续映射,Ω 为 X 中的有界开集,如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界且 $K_P(1-P)N(\bar{\Omega})$ 是紧的,则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L - 紧的。由于 ImQ 与 $KerL$ 同构,因而存在同构映射 $J: ImQ \to KerL$。

引理 1 (延拓定理[4]) 设 L 为指标为零的 Fredholm 算子,N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L - 紧的。如果

(1) $Lx \neq \lambda Nx$,$\forall \lambda \in (0,1)$,$x \in \partial\Omega$;

(2) $QNx \neq 0$,$\forall x \in \partial\Omega \cap KerL$;

(3) $deg(JQN, \Omega \cap KerL) \neq 0$,

则方程 $Lx = Nx$ 在 $DomL \cap \bar{\Omega}$ 中至少有一个解。

2 主要结果

在本节中,我们总是假设函数 a_i, b_i, c_i 和 r_i 满足 $\bar{a}_i > 0$,$\bar{b}_i > 0$,$\bar{c}_i > 0$ 和 $\bar{r}_i > 0$,$i = 1,2$。

定理 1 若代数方程

$$\begin{cases} \bar{a}_1 e^{u_1} + \bar{b}_1 e^{u_1} + \bar{c}_1 e^{u_1 + u_2} = \bar{r}_1 \\ \bar{a}_2 e^{u_2} + \bar{b}_2 e^{u_2} + \bar{c}_2 e^{u_1 + u_2} = \bar{r}_2 \end{cases} \tag{6}$$

至多存在一个解 $(u_1, u_2) \in R^2$,则系统(4)在初始条件(5)下至少存在一个正 ω - 周期解。

证明 作变换

$$u(t) = \mathrm{e}^{x_1(t)} \quad 和 \quad v(t) = \mathrm{e}^{x_2(t)}$$

则 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 满足

$$\begin{cases} x'_1(t) = r_1(t) - a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t)} - b_1(t)\int_{-T}^{0} B_1(s)\mathrm{e}^{x_1(t+s)}\mathrm{d}s - c_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}\int_{-T}^{0} C_1(s)\mathrm{e}^{x_2(t+s)}\mathrm{d}s \\ x'_2(t) = r_2(t) - a_2(t)\mathrm{e}^{x_2(t)} - b_2(t)\int_{-T}^{0} B_2(s)\mathrm{e}^{x_2(t+s)}\mathrm{d}s - c_2(t)\mathrm{e}^{x_2(t)}\int_{-T}^{0} C_2(s)\mathrm{e}^{x_1(t+s)}\mathrm{d}s \end{cases} \tag{7}$$

取

$$X = Z = \{x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^{\mathrm{T}} \in C(R; R^2), x(t) = x(t+\omega)\}$$

对于 $x(t) \in X$,设 $\| x(t) \| = (\sum_{i=1}^{2} (\max_{t\in[0,\omega]} |x_i(t)|)^2)^{\frac{1}{2}}$,则在范数 $\|\cdot\|$ 的意义下,X,Z 都是 Banach 空间。令

$$Nx = \begin{pmatrix} r_1(t) - a_1(t)e^{x_1(t)} - b_1(t)\int_{-T}^{0} B_1(s)e^{x_1(t+s)}ds - c_1(t)e^{x_1(t)}\int_{-T}^{0} C_1(s)e^{x_2(t+s)}ds \\ r_2(t) - a_2(t)e^{x_2(t)} - b_2(t)\int_{-T}^{0} B_2(s)e^{x_2(t+s)}ds - c_2(t)e^{x_2(t)}\int_{-T}^{0} C_2(s)e^{x_1(t+s)}ds \end{pmatrix}, x \in X$$

$$Lx = x', \quad Px = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} x(t)dt, \quad x \in X$$

$$Qz = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} z(t)dt, \quad z \in Z$$

有

$$KerL = \{x \mid x \in X, x = c \in R^2\} \quad ImL = \{z \mid z \in Z, \int_0^{\omega} x(t)dt = 0\}$$

易知 $\dim(KerL) = 2 = \dim(Y \mid ImL)$,$ImL$ 为 Z 中闭子集,所以 L 是指标为零的 Fredholm 算子。容易证明 P,Q 是连续投影且满足 $ImP = KerLA$;$MKerQ = ImL$,从而 $L|_{DomL \cap KerP}$:$DomL \cap KerP \to ImL$ 是一一对应的,其逆存在,设为 K_P :$ImL \to DomL \cap KerP$ 且有

$$K_P(z) = \int_0^t z(s)ds - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t z(s)ds$$

设 Ω 是 X 中有界开集,则对于 $\forall x \in X$ 有

$$QNx = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}[r_1(t) - a_1(t)e^{x_1(t)} - b_1(t)\int_{-T}^{0} B_1(s)e^{x_1(t+s)}ds - c_1(t)e^{x_1(t)}\int_{-T}^{0} C_1(s)e^{x_2(t+s)}ds]dt \\ \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}[r_2(t) - a_2(t)e^{x_2(t)} - b_2(t)\int_{-T}^{0} B_2(s)e^{x_2(t+s)}ds - c_2(t)e^{x_2(t)}\int_{-T}^{0} C_2(s)e^{x_1(t+s)}ds]dt \end{pmatrix}$$

及

$$\begin{aligned} & K_P(I-Q)Nx \\ = & \begin{pmatrix} \int_0^t[r_1(s) - a_1(s)e^{x_1(s)} - b_1(s)\int_{-T}^{0} B_1(r)e^{x_1(r+s)}dr - c_1(s)e^{x_1(s)}\int_{-T}^{0} C_1(r)e^{x_2(r+s)}dr]ds \\ \int_0^t[r_2(s) - a_2(s)e^{x_2(s)} - b_2(s)\int_{-T}^{0} B_2(r)e^{x_2(r+s)}dr - c_2(s)e^{x_2(s)}\int_{-T}^{0} C_2(r)e^{x_1(r+s)}dr]ds \end{pmatrix} \\ - & \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t[r_1(s) - a_1(s)e^{x_1(s)} - b_1(s)\int_{-T}^{0} B_1(r)e^{x_1(r+s)}dr - c_1(s)e^{x_1(s)}\int_{-T}^{0} C_1(r)e^{x_2(r+s)}dr]dsdt \\ \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t[r_2(s) - a_2(s)e^{x_2(s)} - b_2(s)\int_{-T}^{0} B_2(r)e^{x_2(r+s)}dr - c_2(s)e^{x_2(s)}\int_{-T}^{0} C_2(r)e^{x_1(r+s)}dr]dsdt \end{pmatrix} \\ - & \begin{pmatrix} \left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\int_0^{\omega}[r_1(t) - a_1(t)e^{x_1(t)} - b_1(t)\int_{-T}^{0} B_1(s)e^{x_1(t+s)}ds - c_1(t)e^{x_1(t)}\int_{-T}^{0} C_1(s)e^{x_2(t+s)}ds]dt \\ \left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\int_0^{\omega}[r_2(t) - a_2(t)e^{x_2(t)} - b_2(t)\int_{-T}^{0} B_2(s)e^{x_2(t+s)}ds - c_2(t)e^{x_2(t)}\int_{-T}^{0} C_2(s)e^{x_1(t+s)}ds]dt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由 QN,$K_P(I-Q)N$ 的表达式,再利用 Arezela-ascoli 定理容易知道 $QN(\overline{\Omega})$有界且 $K_P(I-P)N(\overline{\Omega})$是紧的。因此 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L_- 紧的。又因为 $ImQ = KerL$,因此 J 是 ImQ 到 $KerL$ 的恒等映射。我们考虑算子方程 $Lx = \lambda Nx$,$\lambda \in (0,1)$,即

$$x'_1(t) = \lambda[r_1(t) - a_1(t)e^{x_1(t)} - b_1(t)\int_{-T}^{0} B_1(s)e^{x_1(t+s)}ds - c_1(t)e^{x_1(t)}\int_{-T}^{0} C_1(s)e^{x_2(t+s)}ds] \quad (8)$$

$$x'_2(t) = \lambda[r_2(t) - a_2(t)e^{x_2(t)} - b_2(t)\int_{-T}^{0} B_2(s)e^{x_2(t+s)}ds - c_2(t)e^{x_2(t)}\int_{-T}^{0} C_2(s)e^{x_1(t+s)}ds] \quad (9)$$

设 $\Omega_1 = \{x \in X, Lx = \lambda Nx, \lambda \in (0,1)\}$,则对任意的 $x \in \Omega_1$,(8) 式和(9) 式的两端在区间$[0,\omega]$上积分可得

$$\int_0^\omega [a_1(t)e^{x_1(t)} + b_1(t)\int_{-T}^0 B_1(s)e^{x_1(t+s)}ds + c_1(t)e^{x_1(t)}\int_{-T}^0 C_1(s)e^{x_2(t+s)}ds] = \bar{r}_1\omega \tag{10}$$

$$\int_0^\omega [a_2(t)e^{x_2(t)} + b_2(t)\int_{-T}^0 B_2(s)e^{x_2(t+s)}ds + c_2(t)e^{x_2(t)}\int_{-T}^0 C_2(s)e^{x_1(t+s)}ds] = \bar{r}_2\omega \tag{11}$$

由式(8) 和(10) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\omega |x'_1(t)|dt \\
&= \lambda\int_0^\omega |r_1(t) - a_1(t)e^{x_1(t)} - b_1(t)\int_{-T}^0 B_1(s)e^{x_1(t+s)}ds - c_1(t)e^{x_1(t)}\int_{-T}^0 C_1(s)e^{x_2(t+s)}ds|dt \\
&\leqslant \int_0^\omega |r_1(t)|dt + \int_0^\omega |[a_1(t)e^{x_1(t)} + b_1(t)\int_{-T}^0 B_1(s)e^{x_1(t+s)}ds + c_1(t)e^{x_1(t)}\int_{-T}^0 C_1(s)e^{x_2(t+s)}ds]|dt \\
&= (\bar{r}_1 + \bar{r}_1^*)\omega
\end{aligned} \tag{12}$$

同理由式(9) 和(11) 可得

$$\int_0^\omega |x'_2(t)|dt \leqslant (\bar{r}_2 + \bar{r}_2^*)\omega \tag{13}$$

因为 $x(t) \in X$,从而存在 $t_1, t_2 \in [0,\omega]$ 和 $s_1, s_2 \in [0,\omega]$ 使得

$$x_1(t_1) = \min_{t\in[0,\omega]} x_1(t), x_1(t_2) = \max_{t\in[0,\omega]} x_1(t) \quad 和 \quad x_2(s_1) = \min_{t\in[0,\omega]} x_2(t), x_2(s_2) = \max_{t\in[0,\omega]} x_2(t) \tag{14}$$

再由式(10) 和(14) 可得

$$\bar{a}_1\omega e^{x_1(t_1)} \leqslant \bar{r}_1\omega \quad 和 \quad \bar{a}_2\omega e^{x_2(s_1)} \leqslant \bar{r}_2\omega$$

即

$$x_1(t_1) \leqslant \ln(\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1}) \quad 和 \quad x_2(s_1) \leqslant \ln(\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}) \tag{15}$$

由式(12) 和(15) 可得

$$x_1(t) \leqslant x_1(t_1) + \int_0^\omega |x'_1(t)|dt \leqslant \ln(\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1}) + (\bar{r}_1 + \bar{r}_1^*)\omega \tag{16}$$

同理可得

$$x_2(t) \leqslant x_2(s_1) + \int_0^\omega |x'_2(t)|dt \leqslant \ln(\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}) + (\bar{r}_2 + \bar{r}_2^*)\omega \tag{17}$$

由式(10),(14) 以及式(16) 可得

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1\omega &= \int_0^\omega [a_1(t)e^{x_1(t)} + b_1(t)\int_{-T}^0 B_1(s)e^{x_1(t+s)}ds + c_1(t)e^{x_1(t)}\int_{-T}^0 C_1(s)e^{x_2(t+s)}ds] \\
&\leqslant \omega e^{x_1(t_2)}[\bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1 e^{x_2(s_2)}] \\
&\leqslant \omega e^{x_1(t_2)}[(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1(\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2} + e^{(\bar{r}_2+\bar{r}_2^*)\omega})]
\end{aligned}$$

即

$$x_1(t_2) \geqslant \ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1\left[\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2} + e^{(\bar{r}_2+\bar{r}_2^*)\omega}\right]} \doteq B_1$$

同理由式(11),(14) 以及式(17) 可得

$$x_2(s_2) \geqslant \ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2\left[\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1} + e^{(\bar{r}_1+\bar{r}_1^*)\omega}\right]} \doteq B_2$$

从而由上式及(12)式可得

$$x_1(t) \geqslant x_1(t_2) - \int_0^{\omega} |x'_1(t)| \mathrm{d}t \geqslant B_1 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_1^*)\omega \tag{18}$$

同理可得

$$x_2(t) \geqslant x_2(s_2) - \int_0^{\omega} |x'_2(t)| \mathrm{d}t \geqslant B_2 - (\bar{r}_2 + \bar{r}_2^*)\omega \tag{19}$$

由式(16)和(18)可得

$$\max_{t\in[0,\omega]} |x_1(t)| \leqslant \max\left\{\left|\ln\left(\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1}\right) + (\bar{r}_1 + \bar{r}_1^*)\omega\right|, \left|B_1 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_1^*)\omega\right|\right\} \doteq H_1$$

同理由式(17)和(19)可得

$$\max_{t\in[0,\omega]} |x_2(t)| \leqslant \max\left\{\left|\ln\left(\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}\right) + (\bar{r}_2 + \bar{r}_2^*)\omega\right|, \left|B_2 - (\bar{r}_2 + \bar{r}_2^*)\omega\right|\right\} \doteq H_2$$

显然,H_1,H_2 与 λ 的选取无关。记 $H = \left(\sum_{i=1}^{2} H_i\right)^{\frac{1}{2}} + C$,其中 C 充分的大,使代数方程(6)的解(若存在的话)满足 $\|u\| = \|(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\| < C$,从而有 $\|x\| < H$,$\forall x \in \Omega_1$。

令 $\Omega = \{x = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}} \in X \mid \|x\| < H\} \supset \Omega_1$。显然 Ω 满足引理1的条件(1)。取 $x \in \partial\Omega \cap KerL = \partial\Omega \cap R^2$,则有 $\|x\| = H$。于是有

$$QNx = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left[r_1(t) - a_1(t)\mathrm{e}^{x_1} - b_1(t)\int_{-T}^{0} B_1(s)\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{d}s - c_1(t)\mathrm{e}^{x_1}\int_{-T}^{0} C_1(s)\mathrm{e}^{x_2}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\ \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left[r_2(t) - a_2(t)\mathrm{e}^{x_2} - b_2(t)\int_{-T}^{0} B_2(s)\mathrm{e}^{x_2}\mathrm{d}s - c_2(t)\mathrm{e}^{x_2}\int_{-T}^{0} C_2(s)\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{r}_1 - \bar{a}_1\mathrm{e}^{x_1} - \bar{b}_1\mathrm{e}^{x_1} - \bar{c}_1\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2} \\ \bar{r}_2 - \bar{a}_2\mathrm{e}^{x_2} - \bar{b}_2\mathrm{e}^{x_2} - \bar{c}_2\mathrm{e}^{x_2}\mathrm{e}^{x_1} \end{pmatrix} \neq 0$$

故引理1的条件(2)满足。由上式直接计算可得

$$\deg(JQN, \Omega \cap KerL) = \mathrm{Sgn}(\det(a_{ij})\mathrm{e}^{x_1+x_2}) \neq 0$$

其中

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1\mathrm{e}^{u_2} & \bar{c}_2\mathrm{e}^{u_2} \\ \bar{c}_1\mathrm{e}^{u_1} & \bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2\mathrm{e}^{u_1} \end{pmatrix}$$

从而引理1的条件(3)满足。故由引理1知系统(7)在 $\bar{\Omega}$ 上至少有一个 ω-周期解 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}}$,故系统(4)在初始条件(5)下至少有一个正 ω-周期解 $u(t) = \mathrm{e}^{x_1(t)}$,$v(t) = \mathrm{e}^{x_2(t)}$。

注 当 $T = \infty$ 时定理1的结论仍然成立。

参考文献:

[1] Li X L, Zhu D M. Global Existence of Positive Periodic Solutions for a Distributed Delay Competition Model[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2003, 19(3):491-498.

[2] Maynard-smith J. Models in Ecology[M]. Cambridge:Cambridge University, 1974.

[3] 宋新宇,陈兰荪. 一类浮游生物植化相克时滞微分方程的周期解[J]. 数学物理学报,2003,23A(1):8-13.

[4] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear differential Equations[M]. Berlin:Springer, 1977.

[5] 陆征一,周义仓. 数学生物学进展[M]. 北京:科学出版社,2006.

[6] Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics[M]. Kluwer Academic Press, Boston, 1992.

[7] Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics[M]. Academic Press, New York, 1993.

[8] Zhao X. Dynamical Systems in Population Biology[M]. Springer, New York, 2003.

[9] 郑祖庥. 泛函微分方程理论[M]. 合肥:安徽教育出版社,1994.

[10] Hale J K, Verduyn L S M. Introduction to Function Differential Equations[M]. New York:Springerverlag, 1993.