

文章编号 :1001-2486(2007)02-0001-04

分段轴压阶梯梁自由振动及稳定性分析的传递函数方法*

李道奎,雷勇军,唐国金

(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘要 :采用分布传递函数方法,分析任意多段分段常轴压阶梯梁的自由振动和稳定问题,得到形式统一的封闭解析解。根据梁横截面几何尺寸、梁材料和轴压沿梁轴线的变化,将梁分成多段子梁,对每一子梁采用传递函数方法得到其解析解,通过各子梁间的位移连续和力平衡条件,得到分段常轴压阶梯梁的各阶自由振动频率和失稳载荷及其相应的模态形状。通过三阶梯梁的算例验证本文方法的正确性,并以四阶梯梁为例,计算分段轴压多阶梯梁自由振动的固有频率。

关键词 :分布传递函数方法;自由振动;失稳;多阶梯梁

中图分类号 :O342 **文献标识码** :A

Free Vibration and Stability of Multiple-step Beams under Stepped Axial Pressure by Distributed Transfer Function Method

LI Dao-kui, LEI Yong-jun, TANG Guo-jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :With the distributed transfer function method, a closed-form solution is obtained for free vibration and stability of a multiple-step beam under stepped axial pressures. According to variations of the geometry of the cross-section, the material and the axial pressure in axial direction, the beam is divided into multiple sub-beams whose closed-form solution is obtained with the distributed transfer function method. The natural frequencies and buckling loads along with their mode shapes are obtained by using the displacement continuity conditions and force balance conditions between the sub-beams. The method was validated through numerical examples of three-step beams. The natural frequencies of multiple-step beams under different axial pressure in each section were calculated with the example of four-step beams.

Key words :distributed transfer function method; free vibration; buckling; multiple-step beams

由于有强度、刚度和重量等条件的要求以及制造和安装条件的限制,工业中常常采用阶梯式变截面梁。对于无轴压单阶梯梁的自由振动问题研究, Jang 和 Bert^[1]将传统约束阶梯梁的频率求解问题转化为求四阶行列式的根。Naguleswaran^[2-3]对无轴压单阶梯和直至三阶梯的多阶梯梁研究进行了简要的综述,并分别导出了求解无轴压单阶梯和三阶梯梁频率的二阶和四阶行列式。武兰河^[4]基于 Timoshenko 梁理论,采用微分容积单元法求解了阶梯梁的自由振动问题。Bokaian^[5-6]用曲线图的形式给出了轴压和轴拉等截面梁的各阶频率随轴压的变化。张英世和刘宗德^[7]用奇异函数研究了轴向承受单一载荷阶梯梁的动力学问题。Naguleswaran^[8]将阶梯梁分为多个子梁,研究了分段轴压三阶梯梁的自由振动问题,并由零频时的轴压得到该梁的失稳载荷。本文对于两端受任意经典约束、任意多段分段常轴压阶梯梁的自由振动和稳定性问题,采用传递函数方法,得到了形式统一的封闭解析解。在文献[8]中尽管也得到了分段常轴压阶梯梁自由振动的解析解,但由于每一段均需要根据连接条件分别确定振型函数的显示形式,因此将该方法推广到任意多段分段轴压阶梯梁时将会比较繁琐,而且该方法计算失稳载荷时还需要根据零频时轴压来计算。而本文方法不仅可以直接应用到任意多段分段轴压阶梯梁的自由振动及稳定性分析,而且对于各种边界条件和任意截面形状,其解的形式都是非常简单和统一的。

* 收稿日期 2006-09-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50405006),国防科技大学基金资助项目(JC06-01-01)

作者简介:李道奎(1971—)男,副教授,博士。

1 轴压梁的传递函数方法

设长度为 L 的梁受轴向压力 P 根据 Bernoulli-Euler 梁理论,其运动平衡方程为

$$EIw_{xxxx}(x,t) + Pw_{xx}(x,t) = -\rho Aw_{tt}(x,t) \quad (1)$$

其中 ρ 为梁的密度, A 和 I 分别为横截面面积和对中性轴的惯性矩。

考虑零初始条件,对(1)式进行 Laplace 变换,并定义状态空间向量为 $\eta(x,s) = \{\bar{w}(x,s), \bar{w}'(x,s), \bar{w}''(x,s), \bar{w}'''(x,s)\}^T$, 则(1)式可改写为

$$\dot{\eta}(x,s) = F(s)\eta(x,s) \quad (2)$$

其中 $\bar{w}(x,s)$ 表示 Laplace 变换后的值。

由分布参数传递函数方法^[9]可知(2)式的精确解析解为

$$\eta(x,s) = e^{F(s)x}\eta(0,s) \quad (3a)$$

相应边界条件可表示为

$$M\eta(0,s) + N\eta(L,s) = \gamma(s) \quad (3b)$$

其中 M 和 N 分别表示梁左端点和右端点的边界矩阵, $\gamma(s)$ 为边界扰动向量,它们都由边界条件来确定。本文考虑以下四种经典边界条件:

简支边界条件 S: $w=0, w_{xx}=0$;

固支边界条件 C1: $w=0, w_x=0$;

滑动固支边界条件 C2: $EIw_{xxx} + Pw_x=0, w_x=0$;

自由边界条件 F: $EIw_{xxx} + Pw_x=0, w_{xx}=0$ 。

由传递函数理论可知(3)式可以用来求解轴压梁的横向自由振动问题和稳定性问题。令边界扰动向量 $\gamma(s) = 0$, 对于给定轴压 \bar{P} 的自由振动问题,由(3b)可得特征方程为

$$\det[M(\bar{P}) + N(\bar{P})e^{F(\bar{P})L}] = 0 \quad (4)$$

其根 $s_k = j\omega_k$ ($k=1, 2, \dots$) 为轴压梁的特征值, ω_k 即为轴压梁的第 k 阶固有频率,相应的特征向量为

$$\eta(x, \omega_k) = e^{F(\omega_k)x}\Psi \quad (5a)$$

其中,复向量 Ψ 满足

$$[M(\bar{P}) + N(\bar{P})e^{F(\omega_k)L}]\Psi = 0 \quad (5b)$$

注意到向量函数 $\eta(x, \omega_k)$ 包含了梁的横向位移及其各阶导数,因此,从中可以得出对应于第 k 阶模态的位移和内力分布形式。

对于稳定性问题, $M(s)$ 、 $N(s)$ 和 $F(s)$ 是轴压 P 的函数,即 $M(s) = M(P)$ 、 $N(s) = N(P)$ 和 $F(s) = F(P)$, 将 $s=0$ 代入(4)式可得稳定性特征方程为

$$\det[M(P) + N(P)e^{F(P)L}] = 0 \quad (6)$$

(6)式的解 $P_{c,k}$ 即为轴压梁的第 k 阶失稳载荷,将解得的 $P_{c,k}$ 代入(5)式,并令 $\omega_k = 0$ 即可得到相应的失稳模态。

2 分段轴压梁的合成

考虑由 n 段材料、截面尺寸和轴压不同的子梁组合而成一阶梯梁,且各段横截面具有相同的两对称轴,如图1。第 i 段子梁长度为 L_i , 横截面面积和对中性轴的惯性矩分别为 A_i 和 I_i , 材料弹性模量为 E_i , 密度为 ρ_i , 轴压为 P_i 。

对于子梁 i , 其传递函数解为

$$\eta(x_i, s) = e^{F(s)x_i}\eta_i(0, s) \quad (7)$$

其中 x_i 是子梁 i 的局部坐标系。在分段轴压阶梯梁的左右两个端点 $\eta_1(0, s)$ 和 $\eta_n(L_n, s)$ 必须满足边界条件

$$M_1(s)\eta_1(0, s) + N_n(s)\eta_n(L_n, s) = \gamma(s) \quad (8)$$

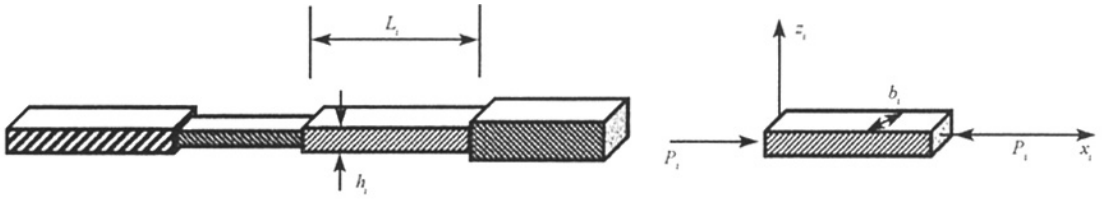


图1 分段轴压阶梯梁及子梁*i*示意图

Fig. 1 Step beam under stepped axial pressures and its *i*st sub-beam

在子梁*i*和子梁*i+1*的连接处,在没有其它外力作用的情况下,包含位移连续条件和力平衡条件在内的连接条件可表示为

$$R_i \boldsymbol{\eta}_i(L_i, s) - R_{i+1} \boldsymbol{\eta}_{i+1}(0, s) = 0 \tag{9}$$

其中 R_i 和 R_{i+1} 为连接矩阵。由(7)式和(9)式得

$$\boldsymbol{\eta}_i(0, s) = e^{-F(s)L_i} R_i^{-1} R_{i+1} \boldsymbol{\eta}_{i+1}(0, s) \tag{10}$$

利用各相邻子梁的连接条件,并反复利用(10)式可得

$$\boldsymbol{\eta}_i(0, s) = P_n(s) \boldsymbol{\eta}_n(0, s) \tag{11}$$

其中 $P_n(s) = \prod_{i=1}^{n-1} (e^{-F(s)L_i} R_i^{-1} R_{i+1})$ 。将(11)式代入(8)式可得

$$\overline{M}(s) \boldsymbol{\eta}_n(0, s) + N_n(s) \boldsymbol{\eta}_n(L_n, s) = \boldsymbol{\gamma}(s) \tag{12}$$

这里 $\overline{M}(s) = M_0(s) P_n(s)$ 。

根据传递函数理论,对于给定各子梁轴压 \bar{P}_i 的分段轴压阶梯梁自由振动问题,特征方程为

$$\det[\overline{M}(i\omega, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n) + N(\bar{P}_n) e^{F(i\omega, P_n)L_n}] = 0 \tag{13}$$

当给定某 $n - j$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) 段子梁的轴压以及另外 j 段子梁的轴压比例,分段轴压阶梯梁稳定性问题的特征方程为

$$\det[\overline{M}(0, P_1, P_2, \dots, P_n) + N(P_n) e^{F(0, P_n)L_n}] = 0 \tag{14}$$

求解特征方程(13)和(14),可以分别得到分段轴压阶梯梁的第 k 阶横向自由振动固有频率 ω_k 和失稳载荷 $P_{c,k}$,再利用与前一节同样的方法,可以分别求的振动模态和失稳模态。

3 算例分析

设各子梁截面尺寸参数为 ϕ_i ,根据梁的横截面形状及其变化情况,将其分为三类^[8],同时,定义子

梁 i 的无量纲化的轴压载荷和频率分别为 $\tau_i = P_i L^2 / (E_1 I_1)$ 和 $\tilde{\omega} = \sqrt{\rho_1 A_1 \omega^2 L^4 / (E_1 I_1)}$ 。

3.1 三阶梯梁的算例验证

两端固支三阶梯梁 $L_1 : L_2 : L_3 : L_4 = 0.25 : 0.3 : 0.25 : 0.2$, $\phi_1 : \phi_2 : \phi_3 : \phi_4 = 1 : 0.7 : 0.5 : 0.25$ 。

算例一,各子梁的轴压为 $[\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4] = [-2 \ -1 \ 3 \ 1]$,计算三类梁的前三阶频率,算例二,子梁1、2和4的 $[\tau_1 \tau_2 \tau_4] = [-2 \ -1 \ 1]$,计算梁的前三阶失稳载荷 τ_{3c} 。两个算例的计算结果及其与文献的比较如表1,从表中可以看出,本文计算结果与文献之间的误差不超过1%,验证了本文计算方法的正确性。

表1 分段轴压三阶梯梁的前三阶固有频率 $\tilde{\omega}$ 和失稳载荷 τ_{3c}

Tab. 1 First three frequencies $\tilde{\omega}$ and buckling loads τ_{3c} of three-step beam under stepped axial pressures

工况	第一类梁			第二类梁			第三类梁			
	第一阶	第二阶	第三阶	第一阶	第二阶	第三阶	第一阶	第二阶	第三阶	
本文解	$\tilde{\omega}$	4. 61489	7. 73947	10. 83857	3. 44485	5. 38952	7. 74857	1. 25864	4. 39962	7. 52796
文献	τ_{3c}	54. 4303	110. 934	391. 312	12. 7672	27. 4317	97. 7972	3. 0317	13. 6368	46. 7699
文献	$\tilde{\omega}$	4. 61485	7. 73947	10. 83859	3. 44486	5. 38951	7. 74858	1. 25865	4. 39961	7. 52793
[8]	τ_{3c}	54. 4303	110. 93	391. 3	12. 7672	27. 432	97. 80	3. 0317	13. 6368	46. 770

3.2 四阶梯梁的固有频率

考虑一左端简支、右端为任意边界条件的第三类分段轴压四阶梯梁,各子梁的几何尺寸比例为 $L_1: L_2: L_3: L_4: L_5 = 0.3: 0.15: 0.2: 0.15: 0.2$, $\phi_1: \phi_2: \phi_3: \phi_4: \phi_5 = 1: 0.8: 0.5: 0.4: 0.6$,若右端为弹性支撑,各子梁的轴压为 $[\tau_1 \tau_2 \tau_4 \tau_5] = [0 \ 0.5 \ 0 \ 0.4]$, $\tau_3 = 0, 1.0$ 或 2.0 表 2 给出了各种边界条件下梁的前三阶固有频率。图 2 给出了 S-S 四阶梯梁在 $\tau_3 = 2.0$ 时前三阶振型图,其中横坐标为梁轴向位置 x 的无量纲化变量 $\chi = x/L$ 。从图中可以看出,弯曲刚度较小(第 4 段)和轴压较大(第 3 段)的梁段的模态位移较大。

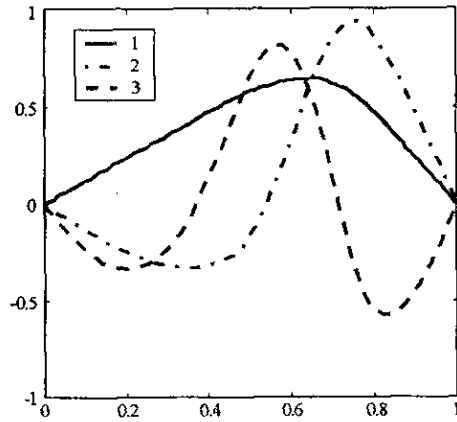


图 2 S-S 四阶梯梁前三阶振型图

Fig. 2 Mode shapes corresponding to first three frequency of three-step beam

表 2 分段轴压四阶梯梁的前三阶固有频率

Tab. 2 First three frequencies $\bar{\omega}$ of four-step beam under stepped axial pressures

边界条件	$\tau_3 = 0$			$\tau_3 = 1$			$\tau_3 = 2$		
	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
S-S	1.82302	4.84332	7.74767	1.77656	4.69606	7.72384	1.71739	4.52391	7.69864
S-C1	2.89945	6.00673	8.28524	2.86997	5.91200	8.25044	2.83465	5.80749	8.21386
S-C2	0.67876	3.58028	6.62930	uuuu	3.48556	6.57107	uuuu	3.37135	6.50912
S-F	uuuu	2.23677	5.31650	uuuu	2.20526	5.18061	uuuu	2.16881	5.02662

注 uuuu 代表已失稳。

4 结论

利用分布参数传递函数方法,分析了任意多段分段轴压阶梯梁的自由振动及稳定性问题,对于各种经典边界条件和任意截面形状,得到了形式统一的隐式解析解,该方法不仅可以用来分析以往文献中出现的单一轴压或分段轴压、截面单阶梯或三阶梯以及它们不同组合后的任意边界条件梁的自由振动及稳定性问题,而且得到的解析解还可以作为其它各种数值方法或近似解析方法的参考值,或直接用于指导工程实际。

参考文献:

- [1] Jang S K, Bert C W. Free Vibrations of Stepped Beams: Exact and Numerical Solutions [J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 130(2): 342-346.
- [2] Naguleswaran S. Natural Frequencies, Sensitivity and Mode Shape Details of an Euler-Bernoulli Beam with One Step Change in Cross-section and with Ends on Classical Supports [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 252(4): 751-67.
- [3] Naguleswaran S. Transverse Vibration of an Euler-Bernoulli Beam on Resilient end Supports and with Step Changes in Cross-section [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2003, 44(12): 2541-55.
- [4] 武兰河, 王立彬, 李国向. 阶梯式 Timoshenko 梁自由振动的 DCE 解 [J]. 力学季刊, 2002, 23(4): 528-533.
- [5] Bokaian A. Natural Frequencies of Beams under Compressive Axial Loads [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 126(1): 49-65.
- [6] Bokaian A. Natural Frequencies of Beams under Tensile Axial Loads [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 142(3): 481-98.
- [7] 张英世, 刘宗德. 轴向受载的阶梯梁的振动 [J]. 工程力学, 1999, 16(3): 75-80.
- [8] Naguleswaran S. Vibration and Stability of an Euler-Bernoulli Beam with up to Three-step Changes in Cross-section and in Axial Force [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2003, 45: 1563-1579.
- [9] Zhou J, Yang B. Strip Distributed Transfer Function Method for Analysis of Plates [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1996, 39(11): 1915-1932.

