

文章编号: 1001- 2486(2007) 04- 0022- 05

# 考虑黏弹性材料随机性的被动约束层阻尼梁动力学分析\*

李恩奇, 雷勇军, 李九天, 李道奎, 唐国金  
(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 采用传递函数方法研究了阻尼层黏弹性材料随机性对被动约束层阻尼 (PCLD) 梁动力学特性的影响。由 Hamilton 原理建立了 PCLD 梁六阶运动微分方程, 通过引入状态向量, 建立了系统的状态空间方程, 利用传递函数方法得到了梁的固有频率和损耗因子。以黏弹性材料分数导数模型中的参数作为基本的随机变量, 并假设其服从正态分布, 使用 Monte Carlo 直接抽样法考察了材料模型参数的随机性对结构固有频率和模态损耗因子的影响。计算结果表明黏弹性材料参数的随机性对梁动力学特性的变异系数影响较大, 模态损耗因子的变异系数最大值是材料参数变异系数的 4.5 倍。

**关键词:** 传递函数方法; 约束层阻尼梁; 黏弹性; 动力学; 随机变量; Monte Carlo 法

**中图分类号:** O327      **文献标识码:** A

## Dynamic Analysis of Passive Constrained Layer Damping Beam with Randomness of Viscoelastic Material

LI En-qi, LEI Yong-jun, LI Jiu-tian, LI Dao-kui, TANG Guo-jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A dynamic analysis of the passive constrained layer damping (PCLD) beam considering randomness of viscoelastic damping layer was studied by using the transfer function method. With an introduction of the state vector, the governing equation of the PCLD beam in state space was established from the six-order differential motion equation, which was derived by using the Hamilton principle. The closed-form solutions of natural frequencies and loss factors of a PCLD beam were obtained by the distributed parameter transfer function method. The parameters in fractional derivative model of viscoelastic material were regarded as the base random variables, which follow normal distribution in this analysis. The influence of parameter randomness on the natural frequency and the mode loss factor of the structure were analyzed by using the Monte Carlo method. Numerical examples show that the randomness has obvious effects on the correlation coefficient of dynamic characteristic, and the maximal value of the loss factor's correlation coefficient is about 4.5 times as much as the one of material parameter. So it is necessary to carry out the random analysis for PCLD structures.

**Key words:** transfer function method; constrained layer damping beam; viscoelasticity; dynamics; random variables; Monte Carlo method

在受控对象上附加黏弹性阻尼材料及约束层, 构成被动约束层阻尼 (PCLD, passive constrained layer damping) 结构, 它可以将振动能量以热能形式耗散, 从而大大减少结构的振动响应。约束层阻尼结构具有结构简单、易于实现、控制频率宽、稳定可靠和成本低的优点, 广泛地应用于航天器结构 (运载火箭的仪器舱、卫星太阳帆板等) 的振动控制、潜艇降噪、建筑结构抗震等方面<sup>[1]</sup>。

1959 年 Kerwin 首次用复模量法建立了三层简支梁的理论, 1965 年 Ditaranto<sup>[2]</sup> 考虑了阻尼层的剪切效应, 建立了约束阻尼梁的六阶微分方程。Rao<sup>[3]</sup> 分析了在不同边界条件下约束阻尼梁的固有频率和损耗因子。此后学者们对 PCLD 梁、板、壳进行大量的研究<sup>[4-6]</sup>, 但目前的研究大都局限于确定性参数问题, 关于材料参数和几何参数的随机性对 PCLD 结构动力学特性的影响研究较少, 国内桂洪斌等<sup>[7-8]</sup> 基于黏弹性阻尼层材料参数和几何参数的随机性, 用 Monte Carlo 直接抽样法对自由层阻尼板进行了自由振动、阻尼特性和简谐响应分析。

\* 收稿日期: 2006- 11- 23

基金项目: 国家 863 计划资助项目 (2002AA001006)

作者简介: 李恩奇 (1978-), 男, 博士生。

本文使用 Hamilton 原理建立了 PCLD 梁动力学方程, 使用分布式传递函数方法进行求解。在此基础上, 主要针对黏弹性阻尼层的三参数分数导数模型, 研究了黏弹性材料参数随机性对 PCLD 悬臂梁固有频率和模态损耗因子影响。采用直接 Monte Carlo 法进行参数的随机性分析, 分析中基本随机变量(黏弹性材料三参数分数导数模型中参数)均认为是服从正态分布的随机变量, 用变异系数作为比较随机变量离散度的判据。

## 1 PCLD 梁传递函数解

典型的 PCLD 梁如图 1 所示, 由基层(1)、黏弹性阻尼层(2)和约束层(3)组成。设基层和约束层厚度分别为  $h_1, h_3$ , 弹性模量分别为  $E_1, E_3$ , 组合弯曲刚度  $D = (E_1 I_1 + E_3 I_3)$ ; 阻尼层厚度为  $h_2$ , 复剪切模量为  $G_2^*$ ; 梁长度为  $L$ , 单位长度质量为  $m(x)$ 。设 PCLD 梁服从小变形假设, 且各层具有相同的挠度; 各层之间没有滑移, 层间位移连续; 基层和约束层的剪切效应小, 弯曲变形服从 Euler 梁假设; 黏弹性阻尼层只考虑其剪切变形  $\gamma_2$ , 忽略纵向刚度(Kerwin 假设); 忽略纵向振动和转动惯量的影响。

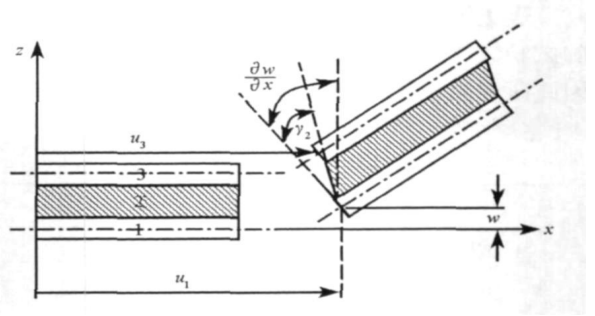


图 1 PCLD 梁变形图

Fig. 1 The deformation pattern of beam with PCLD

采用 Hamilton 原理  $\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0$  可以出推导 PCLD 梁的运动微分方程为<sup>[9]</sup>

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g^* (1 + Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - g^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = \frac{1}{D} \left[ \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} - g^* q(x, t) \right] \quad (1)$$

其中  $Y = \frac{Kc^2}{D}$ ,  $g^* = \frac{G_2^* A_2}{Kh_2^2}$ ,  $c = 1 + \frac{h_1 + h_3}{2h_2}$ ,  $A_2 = bh_2$ ,  $b$  为梁宽,  $q(x, t)$  为梁均布外载荷。

取状态向量  $\tilde{\eta}(x, t)$

$$\tilde{\eta}(x, t) = \left\{ w(x, t), \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial w^2(x, t)}{\partial x^2}, \frac{\partial w^3(x, t)}{\partial x^3}, \frac{\partial w^4(x, t)}{\partial x^4}, \frac{1}{g^*} \frac{\partial w^5(x, t)}{\partial x^5} \right\}^T \quad (2)$$

对方程(1)进行 Laplace 变换, 并将其改写为状态方程的形式

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\eta} = F(s) \tilde{\eta} + q \quad (3)$$

这里“~”表示 Laplace 变换后相应的物理量,  $F(s) \in C^{6 \times 6}$ , 其系数由方程(1)确定。由  $\det[M + Ne^{F(s)L}] = 0$  得到系统的特征值  $s_i$ , 其中  $M$  和  $N$  是边界条件选择矩阵。进而可以得到约束层阻尼梁的固有频率  $f_i$  和模态损耗因子  $\eta_i$ <sup>[9]</sup>。

## 2 分析阻尼层黏弹性材料随机性的必要性

目前, 在 PCLD 结构的动力学分析中一般只考虑黏弹性材料的频变特性, 如复模量模型、分数导数模型和 GHM 模型等。但黏弹性材料的力学性能非常复杂, 除了和频率相关外, 还与温度和应变幅值等因素有着密切的关系, 并且受其它环境因素(如烟熏、油污、辐射、高真空)的影响。无论采用何种黏弹性材料频变模型, 与实际材料的力学性能都存在着一定的偏差, 由于精确描述这种偏差存在着一定的困难, 有时也将这种偏差看成是随机性的。

为了更清晰地说明黏弹性材料不确定性的影响, 本文以 PCLD 悬臂梁为例, 研究不同的黏弹性材料力学模型对梁动力学特性影响。文献[4]根据 ZN-1 型黏弹性材料的复剪切模量试验曲线, 使用最小二乘法拟合出频域内 ZN-1 型黏弹性材料的标准线性模型和分数导数模型。标准线性模型表达式如式(4)所示, 取  $N = 2, 3, 4, 5$  等四种情况, 分别成为 STD5、STD7、STD8、STD11 模型。

$$G_2^*(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_0 + q_1 s + \dots + q_N s^N}{1 + p_1 s + \dots + p_N s^N} \quad (4)$$

分数导数模型表达式如式(5)所示,取  $N_1 = 0, N_2 = 1$  和  $N_1 = N_2 = 1$  两种情况,分别称为 RT 模型和 RTG 模型。

$$G_2^*(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_0 + q_1 s^{\alpha_1} + \dots + q_{N_2} s^{\alpha_{N_2}}}{1 + p_1 s^{\beta_1} + \dots + p_{N_1} s^{\beta_{N_1}}} \quad (5)$$

文献[4]中 PCLD 悬臂梁的材料特性参数和几何尺寸如下:  $L = 400\text{mm}, h_1 = 3\text{mm}, h_2 = 2\text{mm}, h_3 = 1.2\text{mm}, \rho_1 = 7840\text{kg/m}^3, \rho_2 = 789.5\text{kg/m}^3, \rho_3 = 2802.8\text{kg/m}^3, E_1 = 20.28 \times 10^{10}\text{Pa}, E_3 = 6.762 \times 10^{10}\text{Pa}$ 。

表1给出了不同黏弹性模型下 PCLD 悬臂梁的前三阶固有频率和损耗因子。从表1可以看出,相同的试验数据曲线,不同的黏弹性材料拟合模型,所得的计算结果不同,且损耗因子的计算值差别较大。因此研究阻尼层黏弹性材料力学性能的随机性对 PCLD 结构动力学特性的影响是十分必要的。

表1 不同模型下 PCLD 悬臂梁的固有频率和损耗因子

Tab.1 Natural frequencies and loss factors of a PCLD beam in various viscoelastic model

	$f_1/\text{Hz}$	$\eta_1/\%$	$f_2/\text{Hz}$	$\eta_2/\%$	$f_3/\text{Hz}$	$\eta_3/\%$
试验	17.50	17.0	96.50	15.5	260.00	10.6
STD5	16.81	18.52	97.80	20.47	268.24	14.60
STD7	17.48	23.14	97.25	13.93	260.00	14.09
STD9	17.39	16.33	96.73	18.40	264.80	16.12
STD11	17.38	15.87	96.69	17.38	265.11	14.66
RT	17.60	19.47	97.93	12.84	263.34	9.77
RTG	17.33	20.78	97.81	17.10	263.90	14.84

### 3 基于黏弹性材料随机性的 PCLD 梁动力学分析

本文以 RT 模型为例,分别选择模型中的系数  $q_0, q_1$  和  $\alpha_1$  作为基本随机变量,探讨随机性对 PCLD 结构振动和阻尼的影响。不失一般性,假设随机变量服从正态分布。随机变量选取原则是以文献[4]拟合值为均值  $\mu_x$ ,给定随机变量的变异系数  $\delta_x$ ,即

$$\delta_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (6)$$

其中  $\sigma_x$  是随机变量的标准差,  $x = q_0, q_1$  或  $\alpha_1$ 。采用 Monte Carlo 直接抽样法进行计算分析,抽样次数均为 10 000 次。

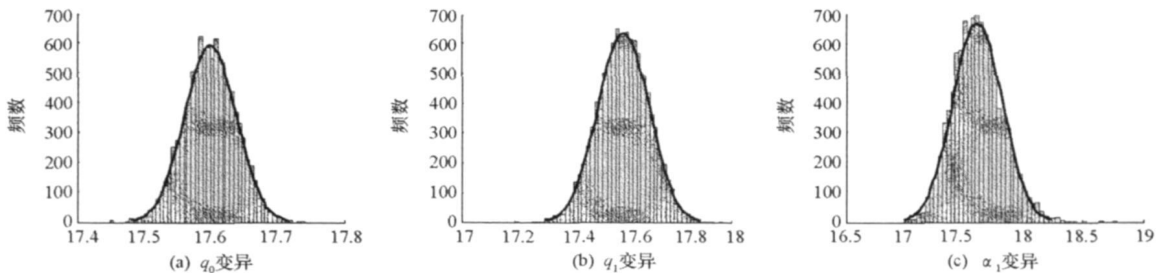


图2 第1阶固有频率频数直方图

Fig.2 Histogram of the 1st natural frequency

随机变量的分布用统计学中频数的概念来描述,即将随机变量样本从最小值至最大值之间划分成等距的若干个区间,落在第  $i$  个区间中的样本数  $\nu_i$  称为频数。本文分析中均划分为 50 个区间。图2和图3分别给出了第一阶模态固有频率和损耗因子频数分布直方图,曲线表示正态拟合曲线。由图可知,当黏弹性材料模型中系数服从正态分布规律时,除以  $\alpha_1$  作为基本随机变量时,第三阶模态正态性较差

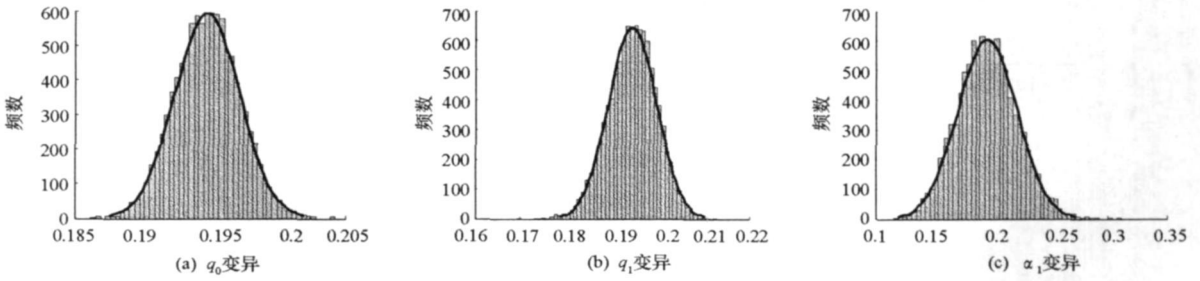


图3 第1阶损耗因子频数直方图

Fig.3 Histogram of the 1st loss factor

以外, 其它情况下 PCLD 悬臂梁的固有频率和模态损耗因子基本上也服从正态分布。表 2 列出了各物理变量的均值、方差和变异系数。在分数导数模型三系数分别变异的情况下, 表中计算结果的均值  $\mu$  变化很小, 近似等于确定性结果, 且各系数的随机性对模态损耗因子的影响大于对固有频率的影响。对于 PCLD 梁各阶模态固有频率和损耗因子, 以  $\alpha_1$  作为基本随机变量时, 方差和变异系数的值最大, 其次是以  $q_1$  作为基本随机变量, 以  $q_0$  作为基本随机变量的方差和变异系数值最小。不论哪一个系数变异, 固有频率的变异系数值总是随着阶数的增大而减小。系数  $q_0$  变异时, 模态损耗因子随着阶数的增大而减小; 系数  $q_1$  和  $\alpha_1$  变异时, 模态损耗因子随着阶数的增大而增大。系数  $\alpha_1$  的随机性对 PCLD 梁动力学特性影响最大,  $\delta_{\eta_3} / \delta_{\alpha_1} \approx 4.5$ 。这是因为  $\alpha_1$  在分数导数模型中位于指数项, 较小的扰动也会引起黏弹性阻尼层复模量较大的变化。

表2 随机变量的统计值

Tab.2 Statistical data of random variables

变量	$q_0$ 变异			$q_1$ 变异			$\alpha_1$ 变异		
	$\mu$	$\sigma$	$\delta$	$\mu$	$\sigma$	$\delta$	$\mu$	$\sigma$	$\delta$
$q_0$	2.194	0.1097	0.05	/	/	/	/	/	/
$q_1$	/	/	/	0.3747	0.0187	0.05	/	/	/
$\alpha_1$	/	/	/	/	/	/	0.5792	0.0290	0.05
$f_1$	17.5988	0.0383	0.0022	17.5988	0.0947	0.0054	17.6146	0.2084	0.0118
$\eta_1$	0.1947	0.0024	0.0122	0.1945	0.0053	0.0272	0.1959	0.0253	0.1291
$f_2$	97.9275	0.05188	0.0005	97.9275	0.3167	0.0032	98.0037	0.9883	0.0101
$\eta_2$	0.1284	0.00044	0.0034	0.1283	0.0041	0.0319	0.1299	0.02188	0.1684
$f_3$	263.3378	0.0629	0.0002	263.3363	0.5893	0.0022	263.5060	2.0389	0.0077
$\eta_3$	0.0977	0.0001	0.0011	0.0976	0.0041	0.0421	0.0998	0.0225	0.2254

表3 给出了 PCLD 悬臂梁固有频率的相关系数和损耗因子的相关系数。其中 0.0279 是当黏弹性材料 RT 模型中系数  $q_0$  和  $q_1$  分别变异时所得两组第一阶固有频率数据之间的相关系数, 其它以此类推。表中相关系数的绝对值都比较小, 最大值也小于 3%, 可以近似认为以  $q_0$ 、 $q_1$  和  $\alpha_1$  作为基本随机变量, 所得梁动力学特性彼此之间不具有相关性。

表3 随机变量的相关系数

Tab.3 Correlation coefficient of random variables

	$q_0$ 和 $q_1$	$q_0$ 和 $\alpha_1$	$q_1$ 和 $\alpha_1$
$f_1$	0.0279	- 0.0015	- 0.009
$\eta_1$	- 0.0281	0.0012	- 0.009
$f_2$	- 0.0011	- 0.0089	0.0111
$\eta_2$	0.0010	0.0090	0.0104
$f_3$	0.0110	0.0059	- 0.0017
$\eta_3$	- 0.0110	- 0.0059	- 0.0016

## 4 结论

(1) 当黏弹性材料分数导数模型中系数服从正态分布规律时, PCLD 悬臂梁的固有频率和模态损耗因子基本上也服从正态分布。

(2) 当参数的变异系数值比较小时(5%), 黏弹性材料参数随机性对固有频率和模态损耗因子的均值影响很小, 近似等于确定性结果。

(3) 在黏弹性材料三参数分数导数模型中, 系数  $\alpha_1$  的随机性对 PCLD 梁动力学特性影响最大。

(4) 当以三参数分数导数模型中三个系数分别作为基本随机变量时, 可近似认为计算结果不相关。

## 参考文献:

- [1] 张景绘, 李宁, 李新民, 等. 一体化振动控制——若干理论、技术问题引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] DiTaronto R A. Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite Length Beams [J]. J. of Applied Mechanics, 1965, 32(4): 881- 886.
- [3] Rao D K. Frequency and Loss Factor of Sandwich Beams under Various Boundary Conditions [J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1978, 20(5): 271- 282.
- [4] 陈前. 粘弹性复合结构的动力分析[D]. 南京: 南京航空学院, 1987.
- [5] Wang T, Rajaram S, Nutt S R. Free Vibration Analysis of Sandwich Plate with Consistent Higher-Order Approach [C]//43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, 2005.
- [6] Sainsbury M G, Masi R S. Vibration Damping of Cylindrical Shells Using Strain-energy-based Distribution of an Add-on Viscoelastic Treatment [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 43: 175- 192.
- [7] 桂洪斌, 赵德有, 郑云龙. 基于粘弹性阻尼层随机性自由阻尼层板简谐响应分析[J]. 大连理工大学学报, 2002, 42(6): 706- 708.
- [8] 桂洪斌, 赵德有, 金咸定. 基于材料参数随机性的粘弹性结构振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2002, 21(4): 66- 68.
- [9] 李恩奇, 雷勇军, 唐国金, 等. 基于传递函数方法的约束层阻尼梁动力学分析 [J]. 振动与冲击, 2007, 26(2): 75- 78.