

文章编号: 1001- 2486(2007) 04- 0062- 04

## 模式转换器耦合波方程组的微波网络矩阵解法\*

袁成卫, 钟辉煌

(国防科技大学 光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 求解具有边值条件的耦合波微分方程组是研究变截面波导或弯曲波导模式转换器的基本方法。利用微波网络理论, 给出了一种求解边值条件耦合波微分方程组的新方法, 以简化求解过程, 并使得解的物理意义更加明确。对于一个考虑了  $N$  个微波模式相互作用的耦合波微分方程组, 通过分别赋予其  $2N$  个不同的初值条件并求解, 可得到该方程组所描述模式转换器的传输矩阵和散射矩阵, 进一步利用散射矩阵可得到给定边值条件下微分方程组的解。

**关键词:** 耦合波理论; 微分方程组; 微波网络; 模式转换器; 波导

**中图分类号:** TN82      **文献标识码:** A

## A Microwave Network Matrix Solution to Coupling wave Differential Equations for Mode Converter

YUAN Cheng Wei, ZHONG Hui Huang

(College of Optoelectric Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Solving coupling wave differential equations with boundary value conditions is a basic method for investigating waveguide mode converters with varying radius or bent axis. A matrix method according to microwave net theory is presented to make the solution simple and explicit with clearer physical meanings. For a group of coupling wave differential equations in which  $N$  coupling waveguide modes are considered, the transmitting matrix and scattering matrix of the converter described by the equations can be obtained by solving the differential equations  $2N$  times with different initial value conditions, respectively. Then with use of the scattering matrix, the solution of the coupling wave differential equations with boundary value conditions can be deduced.

**Key words:** coupling wave theory; differential equations; microwave network; mode converter; waveguide

模式转换技术在高功率微波系统中获得了广泛的应用, 对高功率微波的传输、发射和测量均十分重要。为此人们研究了各式各样的波导模式转换器<sup>[1-6]</sup>, 其结构主要可以分为两类: 波导半径渐变(微扰)的波纹型模式转换器<sup>[1-3]</sup>和波导轴线弯曲的弯曲型模式转换器<sup>[4-5]</sup>。对于高功率微波源如虚阴极振荡器、多波契伦可夫发生器等<sup>[7]</sup>, 其输出的模式多为圆波导  $TM_{0n}$  模, 其外接的波导模式转换器可采用以下变换序列:  $TM_{0n} \rightarrow TM_{01} \rightarrow TE_{11} \rightarrow HE_{11}$ , 旨在将无确定极化方向、辐射方向图为中空环状的  $TM_{0n}$  模变换为具有确定极化方向、易于定向发射的  $HE_{11}$  模式。其中  $TM_{0n} \rightarrow TM_{01}$ <sup>[1]</sup> 以及  $TE_{11} \rightarrow HE_{11}$  模式变换可采用半径渐变的波纹型模式转换器来实现, 而  $TM_{01} \rightarrow TE_{11}$  转换则可以采用轴线弯曲的弯曲型模式转换器<sup>[4-5]</sup> 实现。

### 1 耦合波微分方程组

耦合波理论<sup>[8]</sup> 是处理波导不规则问题的主要方法之一, 被广泛应用于微波器件的分析和设计。要了解半径渐变或轴线弯曲对波导内传输模式的影响, 必须建立相应的耦合波方程<sup>[1-6]</sup>。根据耦合波理论<sup>[8]</sup>, 光滑波导半径渐变时, 波导中的  $mn$  模(包括  $E_{mn}$  和  $H_{mn}$  模) 仅能与  $mn'$  模耦合, 它的角向周期数所对应下标  $m$  不改变。因此, 相应的耦合波方程可写为:

\* 收稿日期: 2006- 12- 30

基金项目: 国家 863 高技术计划资助项目(2002AA 872020)

作者简介: 袁成卫(1974-), 男, 讲师, 博士。

$$\begin{cases} \frac{dA_{mn}^+}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{d(\ln \gamma_{mn})}{dz} A_{mn}^- - \gamma_{mn} A_{mn}^+ + \sum_{m'n'} (C_{mn, m'n'}^+ A_{m'n'}^+ + C_{mn, m'n'}^- A_{m'n'}^-) \\ \frac{dA_{mn}^-}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{d(\ln \gamma_{mn})}{dz} A_{mn}^+ + \gamma_{mn} A_{mn}^- + \sum_{m'n'} (C_{mn, m'n'}^- A_{m'n'}^+ + C_{mn, m'n'}^+ A_{m'n'}^-) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $A_{mn}^+$  和  $A_{mn}^-$  分别为  $mn$  模的前向波(沿 $+z$ 方向传播)和反向波(沿 $-z$ 方向传播)的复幅值;  $\gamma_{mn} = \alpha_{mn} + j\beta_{mn}$  为  $mn$  模的复传播常数,  $\alpha_{mn}$  为衰减常数,  $\beta_{mn}$  为传播常数;  $C_{mn, m'n'}^+$  和  $C_{mn, m'n'}^-$  分别表示  $mn$  模与  $m'n'$  模同向传播时的模式耦合系数和反向传播时的模式耦合系数。而对于轴线弯曲的模式转换器, 波导中的  $mn$  模与  $m'n'$  模耦合的原则是  $|m - m'| = 1$ , 其耦合波方程为:

$$\begin{cases} \frac{dA_{mn}^+}{dz} = -\gamma_{mn} A_{mn}^+ - j \sum_{m'n} (C_{mn, m'n}^+ A_{m'n}^+ + C_{mn, m'n}^- A_{m'n}^-) \\ \frac{dA_{mn}^-}{dz} = +\gamma_{mn} A_{mn}^- + j \sum_{m'n} (C_{mn, m'n}^- A_{m'n}^+ + C_{mn, m'n}^+ A_{m'n}^-) \end{cases} \quad (2)$$

如果在计算时, 考虑模式转换器内的  $N$  个模式, 其中第  $n$  个模式正向传播和反向传播的复幅值分别用  $A_n^+$  和  $A_n^-$  表示。将(1)式和(2)式进行整理, 都可以写成如下矩阵形式:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中,  $A^+ = [A_1^+, A_2^+, \dots, A_n^+, \dots, A_N^+]^T$ , 表示正向传输的各模式的复幅值;  $A^- = [A_1^-, A_2^-, \dots, A_n^-, \dots, A_N^-]^T$ , 表示反向传输的各模式的复幅值;  $D$  为系数矩阵, 可由式(1)或(2)中的系数一一对应得到。

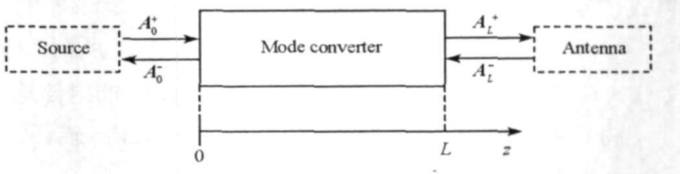


图1 模式转换器输入输出示意图

Fig. 1 The input and output of the mode converter

式(3)是一个含有  $2N$  个未知数的一阶微分方程组, 要对其求解必须给出相应的边界条件, 通常情况为初值条件, 例如图1中  $z = 0$  端口各模式的复幅值或  $z = L$  端口各模式的复幅值。但在图1所示模式转换器中,  $z = 0$  端口的微波模式一半是输入模式, 一半是输出模式, 仅能给出输入模式的初始值  $A_0^+$ , 而输出模式的复幅值  $A_0^-$  是待求量, 不能直接给出; 同样, 在  $z = L$  端口也仅能给出输入模式的初始值  $A_L^-$ , 输出模式的复幅值  $A_L^+$  为待求量。因此在实际求解过程中仅能给出方程(3)的两个不完整的边界条件, 也就是分离边值条件:

$$A^+ |_{z=0} = A_0^+, \quad A^- |_{z=L} = A_L^- \quad (4)$$

因此, 式(3)是一个具有分离边值条件的一阶微分方程组。

比起初值条件的微分方程组, 边值条件微分方程组的算法复杂性大大增加, 所耗的计算时间也长得多。简单打靶法是求解边值条件微分方程组的有效方法<sup>[6]</sup>, 但在具体应用中会遇到一些困难, 尤其在求解较大的耦合波微分方程组时, 要解决许多细节问题。它通过假定一个初值条件对微分方程组求解, 看结果是否满足给定的边值条件, 并将这个过程转换为一个构造函数的求解问题, 在计算过程中需要反复迭代, 直到利用所假定的初值条件求得的解满足给定的边值条件为止, 算法较为复杂。对于式(3)所描述的问题, 在用简单打靶法计算的过程中, 每一次迭代都要  $2N + 1$  次求解假定了边值条件的式(3), 计算量较大。此外, 文献[4]还介绍了一种用传输矩阵法求解此类问题的方法, 该方法把模式转换器分为很多段, 利用近似方法求得每一段的传输矩阵, 然后用级联的方法求得整个模式转换器的传输矩阵。该方法计算简单, 但不便于与一些较为成熟的微分方程组求解方法结合获得更为精确的解。鉴于上述原因, 本文结合耦合波微分方程组所表达的物理意义, 利用微波网络<sup>[9]</sup>理论, 给出一种新的求解方法。新方法通过分别求解一系列初值条件的微分方程组, 得到了模式转换器的传输矩阵, 从而可以获得模式转换器的散射矩阵以及给定边值条件下耦合波微分方程组的解。

## 2 求解边值条件耦合波微分方程组的网络矩阵方法

式(3)描述的是微波通过某一个特定结构(即模式转换器)时的输入与输出的微波网络关系,因此可以直接应用微波网络理论来分析。根据微波网络理论,该微波网络两个端口各模式之间的关系可用传输矩阵  $T$  来表示<sup>[9]</sup>:

$$\begin{pmatrix} A_L^+ \\ A_L^- \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_0^+ \\ A_0^- \end{pmatrix} \quad (5)$$

或者更加简洁地写为:

$$A_L = TA_0 \quad (6)$$

式中,  $A_0 = (A_0^+, A_0^-)^T$  表示在模式转换器  $z = 0$  端各模式的复幅值,  $A_L = (A_L^+, A_L^-)^T$  表示在模式转换器  $z = L$  端各模式的复幅值。如果求得了传输矩阵  $T$ , 则式(3)所描述的物理图像就全部清晰了。

通过分析比较,我们发现,若以

$$A_0^{(i)} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \quad (\text{第 } i \text{ 个元素为 } 1, \text{ 其余为 } 0) \quad (7)$$

为初值条件,求解微分方程组(3),可以得到相应的输出各模式的复幅值:

$$A_L^{(i)} = A|_{z=L; A(0)=A_0^{(i)}} \quad (8)$$

将式(7)和(8)代入式(6),可以发现  $A_L^{(i)}$  正是矩阵  $T$  的第  $i$  列元素,即

$$T^{(i)} = A_L^{(i)} \quad (9)$$

令  $i = 1, 2, \dots, 2N$ , 分别应用式(7)~(9),即可求得传输矩阵  $T$ 。

将传输矩阵  $T$  分解为四个  $N \times N$  阶子矩阵,式(5)所描述的传输方程可以写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} A_L^+ \\ A_L^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^+ \\ A_0^- \end{pmatrix} \quad (10)$$

对式(10)进行适当变换,可以得到该微波网络的散射方程,即描述该微波网络输入量与输出量之间关系的方程:

$$\begin{pmatrix} A_L^+ \\ A_0^- \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A_0^+ \\ A_L^- \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中,散射矩阵  $S$  为:

$$S = \begin{pmatrix} T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21} & T_{12}T_{22}^{-1} \\ -T_{22}^{-1}T_{21} & T_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

这样,将给定的边值条件(4)代入式(11),就可以求得模式转换器输出模式的复幅值,也就是边值条件耦合波微分方程组的解。

为了验证上述计算方法的正确性,用该方法计算了大量文献中的例子,均获得了与文献一致的结果。这里给出用该方法对文献[3]中布拉格反射器(Bragg reflectors)的计算结果。该反射器采用半径渐变的正弦波纹壁圆波导,反射器兼有模式转换器的作用,可以将输入的  $TE_{11}$  模反射并转变为  $TM_{11}$  模输出,其结构参数如表1所示。

表1 布拉格反射器的参数<sup>[3]</sup>

Tab. 1 Parameters of the Bragg reflectors

工作频率 $f_0$	平均半径 $a_0$	波纹幅度 $h$	波纹周期 $\lambda_b$	波纹长度 $L$
250GHz	3.525mm	0.026mm	0.603mm	180.9mm

本文方法计算结果和简单打靶法<sup>[6]</sup>计算结果对比如图2和图3所示。图2为输入  $TE_{11}$  模时反射器反射输出  $TE_{11}$  模和反射输出  $TM_{11}$  模的反射系数随频率的变化关系。图3为分别输入 249GHz 和 250GHz  $TE_{11}$  模时反射器反射输出  $TE_{11}$  模和  $TM_{11}$  模的反射系数随反射器长度的变化关系。可以看到,利用本文

方法所得到的结果与简单打靶法得到的结果一致, 同时也与文献[3]中的结果一致。

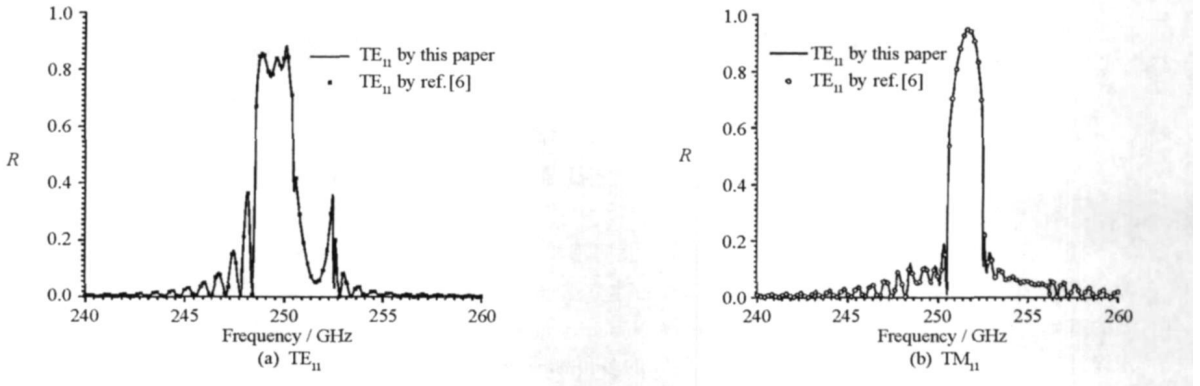


图2 输入 $TE_{11}$ 模时, $TE_{11}$ 模和 $TM_{11}$ 模的反射系数随频率的变化关系

Fig. 2 Reflectance of  $TE_{11}$  mode (a) and  $TM_{11}$  mode (b) with  $TE_{11}$  mode inputted

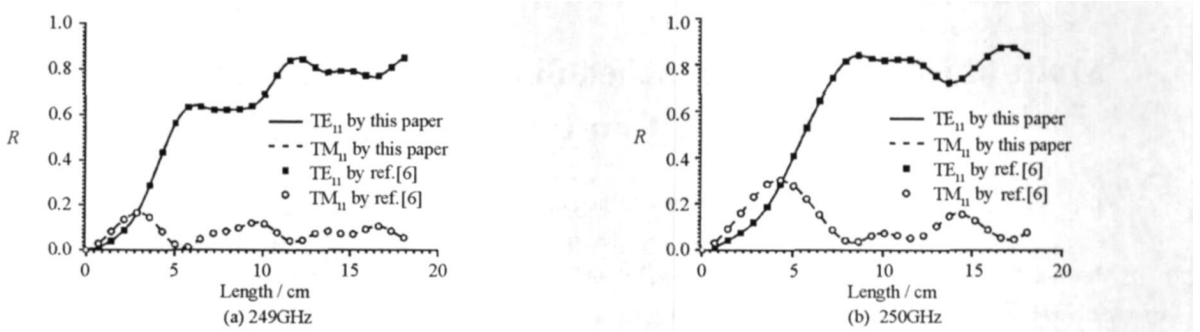


图3 分别输入 249GHz 和 250GHz  $TE_{11}$  模时反射系数随反射器长度的变化关系

Fig. 3 Reflectance versus the converter length with  $TE_{11}$  mode inputted at 249GHz (a) and 250GHz (b)

### 3 结论

利用微波网络理论, 给出了边值条件耦合波微分方程组的一种新解法。对于一个考虑了  $N$  个模式相互耦合的模式转换器, 要求解一个含有  $2N$  个未知数的边值条件微分方程组。利用本文方法, 通过分别赋予其  $2N$  个不同的初值条件并求解, 可得到该方程组所描述模式转换器的传输矩阵和散射矩阵, 进一步利用散射矩阵可得到给定边值条件下微分方程组的解。相对于简单打靶法而言, 该方法具有方法简单、计算量小、可以直接获得模式转换器的传输矩阵和散射矩阵、解的物理意义更加明确等优点。

### 参考文献:

- [1] 杨仕文, 李宏福. 圆波导  $TM_{0n} - TM_{0l}$  模式转换器的研究[J]. 电子科技大学学报, 1993, 22(7): 118-124.
- [2] Thumm M. High power Millimeter wave Mode Conversions in Overmoded Circular Waveguides Using Periodic Wall Perturbations [J]. Int. J. Electron, 1984, 57(6): 1225-1246.
- [3] Chong C K, et al. Bragg Reflector [J]. IEEE Tran. Plasma Sci., 1992, 20(3): 393-402.
- [4] Yang S W, Li H F. Numerical Modeling of 8mm  $TM_{01} - TE_{11}$  Mode Converter [J]. Int. J. Infrared and Millimeter Waves, 1995, 16(11): 1935-1943.
- [5] 张玉文, 舒挺, 袁成卫.  $TM_{01} - TE_{11}$  弯形圆波导模式转换器的优化设计[J]. 强激光与粒子束, 2005, 17(4): 591-594.
- [6] 张江川. 相对论返波管用模式转换器研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2001.
- [7] Barker R J, Schamiloglu E. 高功率微波源与技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [8] 黄宏嘉. 微波原理[M]. 北京: 科学出版社, 1965: 150-200.
- [9] 张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 1994.