

文章编号:1001-2486(2007)04-0077-05

时域磁场积分方程迭代求解*

任猛¹,周东明¹,刘锋¹,贺文辉²,何建国¹

(1. 国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南长沙 410073; 2. 西安通信学院,陕西西安 710106)

摘要:利用时间步进算法(MOT)求解时域电场积分方程解决导体目标瞬态散射问题时,其计算结果不稳定,会发生后期震荡现象。通过对时域磁场积分方程显式和隐式方案的分析,推导出一种隐式的迭代方案,它不但易于实现,而且数值结果表明这种时域磁场积分方程 MOT 迭代方案比时域电场积分方程 MOT 具有更好的稳定性,延缓了后期震荡效应。

关键词:时域磁场积分方程;时间步进算法;后期震荡

中图分类号:TN011 **文献标识码:**A

The Iterative Solver for Time Domain Magnetic Field Integral Equation

REN Meng¹, ZHOU Dong-ming¹, LIU Feng¹, HE Weng-hui², HE Jian-guo¹

(1. College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Xian Communication Institution, Xi'an 710106, China)

Abstract: Time Domain Electric Field Integral Equation (TDEFIE) based on Marching-On in Time (MOT) algorithm suffers from late time oscillations for analysis of scattering from conducting targets, which will induce late-time instability in MOT algorithm. An implicit iterative solver is presented by the analysis of explicit and implicit solutions of Time Domain Magnetic Field Integral Equation (TDMFIE), and then it can be implemented more easily. Numerical results demonstrate that it has more excellent stability compared with TDEFIE and that the proposed solver postpones the late-time oscillation for TDMFIE MOT iterative solution.

Key words: time domain magnetic field Integral equation; marching-on in time method; late-time oscillation

随着脉冲雷达、高分辨率雷达在目标识别和超宽带技术方面的飞速发展,目标的时域特性越来越引起人们的兴趣^[1]。基于矩量法(MOM)求解时域积分方程(TDIE)是获得目标时域特性的一种有效手段,近年来得到了广泛的关注和深入的研究。同时域差分方程方法相比,采用积分方程求解目标电磁辐射和散射特性有其特有的优势:(1)只对目标表面进行剖分,减少了求解的未知数;(2)自动满足远场边界条件。在时域积分方程的求解中,一般采用时间步进(MOT)迭代算法, MOT 算法分为显示^[2]和隐式^[3]两种方案,但是不管是显式方案,还是隐式方案,求解时域电场积分方程(TDEFIE)在某些情况下都会存在后期震荡现象,使计算结果不稳定。

由于 TDEFIE MOT 算法的后期不稳定,阻碍了时域积分方程方法在实际中的应用。针对后期震荡现象,一些学者提出了空间滤波与时间滤波方案^[4-7],部分缓解了后期震荡效应;利用精确的空间积分规则并且恰当地选择时间步长^[8],同样起到了平稳 MOT 算法的作用。本文利用 RWG 空间基函数^[9]、三阶 Lagrange 内插时间基函数,推导满足外表面边界条件的时域磁场积分方程 MOT 隐式迭代方案。计算结果表明,这种 MOT 方案推迟了 TDEFIE 的后期震荡,具有更好的稳定性。

1 时域磁场积分方程

考虑自由空间 V 中一闭合理想导体(PEC),其表面为 S ,入射场 H^{inc} 激励导体表面产生感应电流 J ,进而在空间产生散射场 H^s 。根据边界条件可得:

* 收稿日期:2006-10-01

作者简介:任猛(1978—),男,博士生。

$$\hat{n} \times [H^{inc} + H^s(J)] = J \quad (1)$$

其中:

$$H^s(J) = \frac{1}{\mu} \nabla \times A \quad (2)$$

$$A(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S_0} \frac{J(r', \tau)}{R} dS' \quad (3)$$

式中, $R = |r - r'|$, 表示场点到源点之间的距离; $\tau = t - R/c$, 表示延迟时间; c 表示光速。结合式(1)~(3)得到:

$$J(r, t) = \hat{n} \times H^{inc}(r, t) + \hat{n} \times \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{J(r', \tau)}{R} dS' \quad (4)$$

抽取 Cauchy 主值, 右边第二项可以写成如下形式:

$$\hat{n} \times \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{J(r', \tau)}{R} dS' = \frac{J(r, t)}{2} + \hat{n} \times \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{J(r', \tau)}{R} dS \quad (5)$$

其中 S_0 表示 S 面上移除 $R=0$ 这一奇异点后剩余的部分。因为 $R \neq 0$, 所以旋度符号可以放到积分号内, 将(5)式代入(4)式得:

$$\frac{J(r, t)}{2} = \hat{n} \times H^{inc}(r, t) + \hat{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \nabla \times \frac{J(r', \tau)}{R} dS' \quad (6)$$

2 积分方程的离散

矩量法求解积分方程, 首先要把目标的表面电流用基函数展开。采用三角形网格剖分, 选择定义在三角形对上的 RWG 基函数作为空间基函数, 其结构如图 1 所示。选择三阶 Lagrange 插值函数作为时间基函数(如图 2), 其中 A_n 为三角形的面积, Δt 为时间步长:

$$f_n(r) = \begin{cases} \frac{I_n}{2A_n} \rho_n^+, & r \text{ in } T_n^+ \\ \frac{I_n}{2A_n} \rho_n^-, & r \text{ in } T_n^- \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$T(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{6\Delta t^3} + \frac{t^3}{\Delta t^2} + \frac{11t}{6\Delta t} + 1, & -\Delta t \leq t \leq 0 \\ -\frac{t^3}{2\Delta t^3} - \frac{t^2}{\Delta t^2} + \frac{t}{2\Delta t} + 1, & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{t^3}{2\Delta t^3} - \frac{t^2}{\Delta t^2} - \frac{t}{2\Delta t} + 1, & \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \\ -\frac{t}{6\Delta t^3} + \frac{t^2}{\Delta t^2} - \frac{11t}{6\Delta t} + 1, & 2\Delta t \leq t \leq 3\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

因此, 表面电流能用上述基函数展开成如下形式:

$$J(r, t) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_t} I_{n,i}(t) f_n(r) T_i(t) \quad (9)$$

式中, N_s 、 N_t 分别表示空间采样和时间采样数, $T_i(t) = T(t - i \cdot \Delta t)$ 。

应用 Galerkin 法检验, 选择展开函数 f_m 作为检验函数, 定义内积如下:

$$\langle f, g \rangle = \int_S f \cdot g dS \quad (10)$$

对(6)式应用上述检验过程得:

$$C_m(t) = V_m(t) + Z_m(t) \quad (11)$$

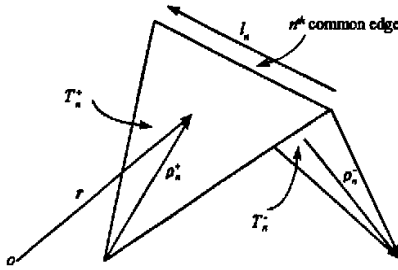


图1 三角形对和相关几何参数

Fig.1 Triangle pair and geometrical parameters associated

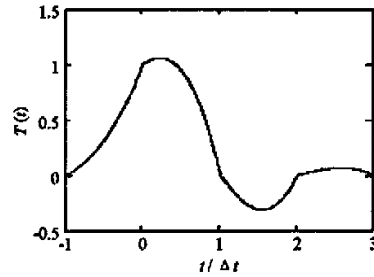


图2 三阶 Lagrange 多项式

Fig.2 Third-order Lagrange polynomial

其中:

$$C_m(t) = \langle f_m, \frac{J(r, t)}{2} \rangle = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{n=1}^{N_n} I_{n,i} T_i(t) \langle f_m, \frac{f_n}{2} \rangle \quad (12)$$

$$V_m(t) = \langle f_m, \hat{n} \times H^{inc}(r, t) \rangle$$

$$Z_m(t) = \langle f_m, \hat{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \nabla \times \frac{J(r', \tau)}{R} dS' \rangle$$

因为

$$\nabla \times \frac{J(r', \tau)}{R} = \frac{1}{c} \frac{\partial J(r', \tau)}{\partial \tau} \times \frac{\hat{R}}{R} + \frac{J(r', \tau) \times \hat{R}}{R^2} \quad (13)$$

所以,

$$Z_m(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} f_m \cdot \hat{n} \times \left[\frac{1}{c} \int_{S_0} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{n=1}^{N_n} \frac{f_n \times \hat{R}}{R} \cdot \frac{\partial T_i(\tau)}{\partial \tau} \cdot I_{n,i} dS' + \int_{S_0} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{n=1}^{N_n} \frac{f_n \times \hat{R}}{R^2} \cdot T_i(\tau) \cdot I_{n,i} dS' \right] dS \quad (14)$$

3 MOT 隐式迭代方案

设当前时刻 $t = t_j = j \cdot \Delta t$, 作代换 $i \leftrightarrow j - i$, 同时考虑到时间基函数的特性, 可得:

$$C_m(t_j) = \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n=1}^{N_n} I_{n,j-i} \cdot T_{j-i}(t_j) \langle f_m, \frac{f_n}{2} \rangle = \sum_{n=1}^{N_n} \langle f_m, \frac{f_n}{2} \rangle \cdot I_{n,j} = \sum_{n=1}^{N_n} C_{m,n} \cdot I_{n,j} \quad (15)$$

$$V_m(t_j) = \int_S f_m \cdot \hat{n} \times H^{inc}(r, t_j) dS \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Z_m(t_j) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} f_m \cdot \hat{n} \times \left[\frac{1}{c} \int_{S_0} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n=1}^{N_n} \frac{f_n \times \hat{R}}{R} \cdot \frac{\partial T_{j-i}(\tau)}{\partial \tau} \cdot I_{n,j-i} dS' \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_0} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n=1}^{N_n} \frac{f_n \times \hat{R}}{R^2} \cdot T_{j-i}(\tau) \cdot I_{n,j-i} dS' \right] dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} f_m \cdot \hat{n} \times \left[\frac{1}{c} \int_{S_0} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n=1}^{N_n} \frac{f_n \times \hat{R}}{R} \cdot \frac{\partial T\left(t_j - \frac{R}{c}\right)}{\partial \tau} \cdot I_{n,j-i} dS' \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_0} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n=1}^{N_n} \frac{f_n \times \hat{R}}{R^2} \cdot T\left(t_j - \frac{R}{c}\right) \cdot I_{n,j-i} dS' \right] dS \quad (17) \end{aligned}$$

设 $Z_m(t_j) = \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n=1}^{N_n} Z_{m,n}^i(t_j) I_{n,j-i}$, 则 $i = 0$ 时含有未知量 $I_{n,j}$, 移到左边和(15)式整合可得:

$$[C_m - Z_m^0] \cdot [I_{n,j}] = [V_{m,j}] + \sum_{i=1}^{j-1} [Z_{m,n}^i] \cdot [I_{n,j-i}] \quad (18)$$

上式左边的系数矩阵为一个稀疏矩阵,右边为已知量,利用基于 Krylove 子空间法迭代求解电流系数,(18)式构成了磁场积分方程的 MOT 隐式迭代方案。

(15)式右边的内积可以解析求解^[10]; (16)式中被积函数可以在检验三角形的质心采样,数值积分求解;(17)式中,内层积分采用七点 Gaussian 采样,外层在质心采样,同样进行数值积分求解。

4 数值结果

设置入射场为 Gaussian 平面波,其磁场分量定义为:

$$H^{inc}(r, t) = \frac{1}{\eta} \mathbf{k} \times E_0 \frac{4}{\sqrt{\pi} \cdot T} e^{-\gamma^2} \quad (19)$$

其中:

$$\gamma = \frac{4}{cT} (ct - ct_0 - r \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (20)$$

η 是自由空间波阻抗,波矢量 $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{z}}$, $E_0 = \hat{\mathbf{x}}$, $T = 4lm$ 是脉冲宽度,延迟时间 $t_0 = 6lm$ (light meter: 光传播 1m 所用的时间)。

图 3 为三角形剖分后的立方体、球和圆柱模型,它们都为理想导体,中心在原点,其中立方体的边长为 1m,三角形总数为 192 个,未知数 288 个;球的半径是 0.5m,三角形 260 个,未知数 390 个;圆柱的底面半径是 0.5m,高是 1m,三角形 136 个,未知数 204 个。图 4(a) 显示在 $C\Delta t = 0.5 \cdot R_{\text{min}}$ 时,立方体顶面中心(0,0,0.5)处的 x 方向电流随时间的分布情况。同时用 TDEFIE 与频域反转离散傅立叶变换(IDFT)结果进行对比,可以看出,三者脉冲部分几乎一致,但是 TDEFIE 很快就产生震荡,而 TDMFIE 依然比较稳定。图 4(b) 显示在 $C\Delta t = 2.0 \cdot R_{\text{min}}$ 时顶面中心处的 x 方向电流分布,可以看到类似的现象,只是 EFIE 的震荡现象向后延迟了一段时间。图 5(a)、(b) 分别为 $C\Delta t = 0.5R_{\text{min}}$ 和 $C\Delta t = 2.0R_{\text{min}}$ 时,球侧面(0.5, 0,0)点的 z 方向电流分布。图 6(a)、(b) 分别为 $C\Delta t = 0.5R_{\text{min}}$ 和 $C\Delta t = 2.0R_{\text{min}}$ 时,圆柱顶面中心(0,0, 0.5)点的 x 方向电流分布情况。由图可知,TDEFIE、TDMFIE 和 IDFT 在入射脉冲激励目标的开始一段时间内,三种结果吻合较好,只是到了后期,TDEFIE 产生了明显的震荡现象,而 TDMFIE 依然比较稳定,与 IDFT 基本保持一致。

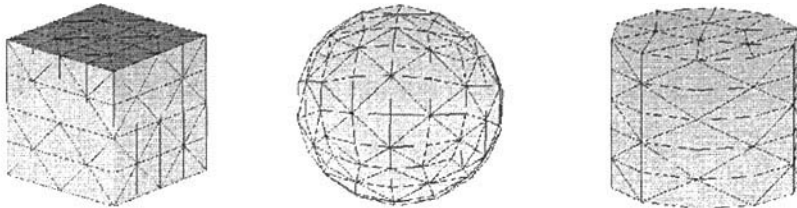
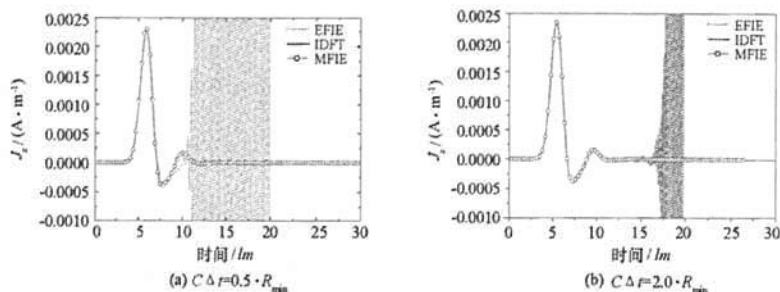
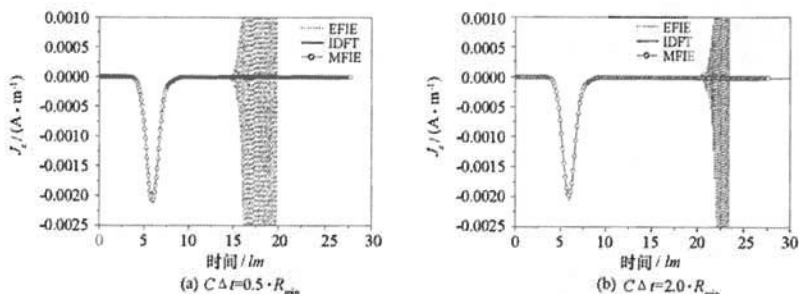
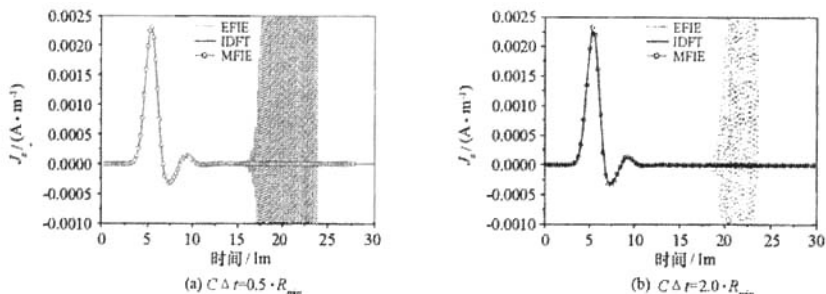


图 3 采用三角形剖分的立方体、球和圆柱模型

Fig.3 Cube, sphere and cylinder surfaces modeled by triangular patches

5 结论

对于较大尺寸光滑表面导体的瞬态散射问题,选择时域磁场积分方程易于计算。相对于 TDEFIE 的 MOT 方案,由(18)式构成的 TDMFIE 的 MOT 隐式迭代方案降低了积分方程的奇异性,改善了矩阵方程的条件数,因此推迟了后期震荡效应,具有较好的稳定性。但是需要指出的是,如果目标比较复杂,且入射脉冲的频谱包含目标的内部特征频率,TDMFIE 最终还是会出现震荡效应,解决这一问题的办法是将 TDEFIE 和 TDMFIE 进行线性组合,构成时域混合场积分方程(TDCFIE),采用 TDCFIE 可以求得稳定的结果。

图4 立方体顶面中心(0,0,0.5)处 x 方向电流分布Fig. 4 x -direction transient current at (0,0,0.5) on the top side center of a conducting cube图5 球侧面(0.5,0,0)处 z 方向电流分布Fig. 5 z -direction transient current at (0.5,0,0) on a conducting sphere of radius 0.5m图6 导体圆柱顶面中心(0,0,0.5)处 x 方向电流分布Fig. 5 x -direction transient current at (0,0,0.5) on the top side center of a conducting cylinder

参考文献:

- [1] Rao S M. Time Domain Electromagnetics [M]. ACADEMIC Press, 1999.
- [2] Rao S M, Wilton D R. Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1991, 39(1):56-61.
- [3] Rao S M, Sarkar T K. Transient Analysis of Electromagnetic Scattering from Wire Structures Utilizing an Implicit Time-domain Integral Equation Technique [J]. Microw. Opt. Technol. Lett., 1998, 17(1):66-69.
- [4] Vechinaki D A, Rao S M. A Stable Procedure to Calculate the Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1992, 40(6):661-665.
- [5] Sadigh A, Arvas E. Treating Instabilities in Marching-on-in-time Method from a Different Perspective [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1993, 41(12): 1695-1702.
- [6] Rynne B P, Smith P D. Stability of Time Marching Algorithms for the Electric Field Integral Equations [J]. J. Electromagn. Waves Applicat., 1990, 12:1181-1205.
- [7] Davies P J. A Stability Analysis of a Time Marching Scheme for the General Surface Electric Field Integral Equation [J]. Appl. Numer. Math., 1998, 27:35-57.
- [8] Manara G, Monorchio A, Reggiamini R. A Space-time Discretization Criterion for A Stable Time-marching Solution of the Electric Field Integral Equation [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1997, 45(3):527-532.
- [9] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1982, 30(3):409-418.
- [10] Rao S M. Electromagnetic Scattering and Radiation of Arbitrarily-shaped Surfaces by Triangular Patch Modeling [D]. Dissertation, Univ. Mississippi, 1980.

