

文章编号: 1001- 2486(2007) 05- 0077- 04

基于 Chirp 变换的快速离散时间尺度变换*

江志红, 程 翥, 王 展

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 提出了一种新的快速离散时间尺度变换算法。给出了离散时间信号尺度变换的构造表达式及其 Chirp 变换快速实现流程。讨论了 Chirp 变换实现中的参数选取准则, 分析了 Chirp 变换的信号带宽问题。讨论了算法的运算效率并与其它算法进行了比较。仿真试验证明了本文算法的有效性。

关键词: 离散时间信号; 时间尺度变换; Chirp 变换

中图分类号: TN911. 72 文献标识码: A

Fast Discrete Time Scale Transformation Based on Chirp Transform

JIANG Zhi hong, CHENG Zhu, WANG Zhan

(College of Electronic Science and Engineer, National Univ. of Defense Technology, Changsha, 410073)

Abstract: A new fast discrete time scale transformation algorithm is presented and an appropriate expression of discrete time scale transformation is supplied. The expression can be calculated fast by using the chirp transform. The performances of the proposed algorithm are analyzed by comparing with other algorithms. The validity of the algorithm is shown by simulation results.

Key words: discrete time signal; time scale transformation; Chirp transform

时间尺度变换就是使信号在时域上扩展而幅度没有发生变化。这种变换在信号处理中有着广泛的应用。在心音信号处理中^[1], 可以使信号成分中时间间隔较短部分通过信号扩展来进行分析。在声学信号处理中^[2], 可以通过对信号的时间尺度变换来重演多普勒效应。在合成孔径雷达成像处理中^[3], 可以利用信号的时间尺度变换简化距离徙动校正。

对离散时间信号, 实现其尺度变换最直观的方法是 sinc 函数插值^[4], 通过恢复出离散信号对应的连续信号得到其尺度变换结果。利用文献[5]定义的 scale transform, 可以很方便地计算离散时间信号的尺度变换。文献[6]利用小波变换的特点, 通过小波滤波器的时间尺度调制特性来实现信号的尺度变换。上述三种方法运算效率都不高。文献[7]给出了用四个调频函数实现信号尺度变换的算法, 这种算法具有很高的效率, 但对采样频率要求较高。

本文通过构造合适的离散时间信号尺度变换表达式, 用 Chirp 变换来计算所构造的表达式, 不仅运算效率高, 而且降低了对信号采样频率的要求, 克服了现有算法的不足。

1 快速离散时间尺度变换

1.1 离散时间尺度变换实现

假定 $x(n)$ ($n = 0, \dots, N-1$) 为一任意的离散时间信号, 定义新序列:

$$y(n) = x(n) \cdot H_f(n) \quad (1)$$

其中,

$$H_f(n) = \exp\left[j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N-1}{2} \cdot n\right] \quad (2)$$

用 $Y(k)$ ($k = 0, \dots, N-1$) 表示 $y(n)$ 的离散傅立叶变换(DFT), 构造函数:

* 收稿日期: 2007- 02- 08

作者简介: 江志红(1977-), 男, 博士生。

$$x(\tau) = \exp\left[-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N-1}{2} \cdot \tau\right] \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \cdot \exp\left[j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot \tau\right] \quad (3)$$

其中, τ 为在 $(0, N)$ 内连续变化的量。将式(1)代入式(3), 则 $x(\tau)$ 可变形为

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{N} \cdot (\tau - n)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N} \cdot (\tau - n)\right]} \quad (4)$$

由于

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{N} \cdot (\tau - n)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N} \cdot (\tau - n)\right]} \approx \frac{\sin\left[\frac{\pi}{N} \cdot (\tau - n)\right]}{\left[\frac{\pi}{N} \cdot (\tau - n)\right]} \quad (5)$$

于是式(4)可写为

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{N} \cdot (\tau - n)\right]}{\left[\frac{\pi}{N} \cdot (\tau - n)\right]} \quad (6)$$

可以看出, 式(6)实际上就是理想插值公式, 这也证明了由式(3)所构造的函数 $x(\tau)$ 与由理想插值公式得到的连续信号几乎完全一样。于是序列 $x(n)$ 的离散时间尺度变换可写为

$$x(\beta \cdot n) = \exp\left[-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N-1}{2} \cdot \beta \cdot n\right] \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \cdot \exp\left[j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot \beta \cdot n\right] \quad (7)$$

其中, β 为时间尺度因子。

1.2 Chirp 变换快速算法

对于带限信号, 在满足采样定理的条件下, 用 sinc 函数插值可以精确地实现离散时间尺度变换^[4]。但这种方法运算量太大, 不适合实时处理。式(7)是理想插值公式的近似表达式, 其近似的条件如式(5)所示, 并且式(7)与 IFFT 的表达式非常类似。在数字实现时, IFFT 通常也是用 FFT 来实现。注意到

$$n \cdot k = \frac{1}{2} [n^2 + k^2 - (n - k)^2] \quad (8)$$

于是式(7)变为

$$x(\beta \cdot n) = \frac{1}{N} \cdot H_{POM}(n) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \cdot \exp\left[-j \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \beta \cdot (n - k)^2\right] \quad (9)$$

其中,

$$G(k) = Y(k) \cdot H_{PRM}(k) \quad (10)$$

$$H_{PRM}(k) = \exp\left[j \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \beta \cdot k^2\right] \quad (11)$$

$$H_{POM}(n) = \exp\left[-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N-1}{2} \cdot \beta \cdot n\right] \cdot \exp\left[j \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \beta \cdot n^2\right] \quad (12)$$

$H_{PRM}(k)$, $H_{POM}(n)$ 分别为展宽滤波器和相位补偿滤波器的系统响应函数。利用 n 代替 k , k 代替 n , 则式(9)可变为

$$x(\beta \cdot k) = \frac{1}{N} \cdot H_{POM}(k) \cdot \left\{ [Y(k) \cdot H_{PRM}(k)] \cdot H_{MCM}(k) \right\} \quad (13)$$

其中,

$$H_{MCM}(k) = \exp\left[-j \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \beta \cdot k^2\right] \quad (14)$$

表示压缩滤波器的系统响应函数。由于 n 与 k 可以相互代替, 由式(13)得到的结果即为所求的离散时间尺度变换信号 $x(\beta \cdot n)$ 。其实现流程如图 1 所示。

2 算法性能分析

2.1 算法的参数确定

由图 1 可以看出, 本文提出的快速算法的关键在于将离散时间尺度变换后的信号变换成原始信号

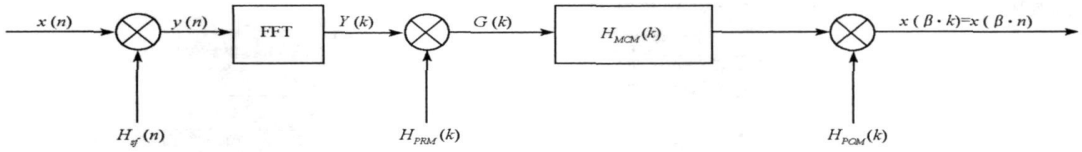


图 1 用 Chirp 变换快速实现离散时间信号尺度变换流程图

Fig. 1 The flow diagram of the time scale transformation by using the Chirp transform

通过一个线性时不变系统的输出,因而可以用 FFT 来实现,具有很高的运算效率。但是,因为 $G(k)$ 为有限长序列,而 $H_{MCM}(k)$ 却为无限长序列,因此在实现时必须确定 $H_{MCM}(k)$ 的长度。注意到,在计算 $G(k)$ 和 $H_{MCM}(k)$ 的卷积时,只要求 $k = 0, \dots, N - 1$ 点上的卷积结果是正确的,而其余的卷积值正确与否无关紧要。为了计算间隔 0 到 $N - 1$ 点内的卷积结果,所需的 $H_{MCM}(k)$ 至少应从 $-N + 1$ 到 $N - 1$ 取值。

2.2 采样频率分析

从图 1 的流程可知,本算法在实现离散时间尺度变换的过程中引入了调频信号。用 B_e, B_c 分别表示展宽滤波器和压缩滤波器的带宽。为了使所有的频率分量都限制在压缩滤波器带宽内, B_c 通常大于 B_e 。从图 1 可以看出,此时信号的带宽 B_s 等于 $(B_c - B_e)$ 。用 T_e, T_c 分别表示展宽滤波器和压缩滤波器的时宽,则信号的时宽也限定为 T_e 。在工程应用中,通常应使分辨点数 $(B_c - B_e) \cdot T_e$ 最大^[8]。令 $B_e = \alpha \cdot B_c$, 于是分辨点数可写为 $(\alpha - \alpha^2) T_e B_c$ 。微分后容易看出,当 $\alpha = 0.5$ 时分辨点数最大,此时展宽滤波器带宽和信号带宽一样。也就是说,由于 Chirp 变换处理所引入的调频带宽与信号带宽一样,在信号采样满足采样定理的条件下不会造成信号混叠。这说明本文算法对采样率没有额外要求。

2.3 运算量分析

假定信号采样点数 N 为 2 的幂次方,信号为复信号。本文算法的运算量可以通过图 1 所示各个步骤运算所需的复数乘法次数来估算。表 1 给出了 Chirp 变换算法所需的总的复数乘法运算量,同时给出了文献[4]和文献[7]算法实现离散时间尺度变换所需的总的复数乘法运算量。为了方便,文献[4]的算法称为 sinc 插值算法,文献[7]的算法称为 CMC 算法。

表 1 本文算法与典型算法运算量比较

Tab. 1 Efficiency comparison between chirp transform and other typical algorithms

	复数乘法运算量
Chirp 变换算法	$7N + 5 \cdot \left(\frac{N}{2} 2 \log_2 N \right)$
sinc 插值算法	N^2
CMC 算法	$10N + 8 \cdot \left(\frac{N}{2} 2 \log_2 N \right)$

3 仿真试验

用于仿真试验的原始信号为 $x[n] = 2\sin(\omega_1 n) + 3\sin(\omega_2 n)$, 其中 $\omega_1 = 0.2\pi, \omega_2 = 0.32\pi$, 尺度因子 $\beta = 0.8$ 。理想的尺度变换后的信号为 $y[n] = 2\sin(\beta\omega_1 n) + 3\sin(\beta\omega_2 n)$ 。图 2 给出了原始信号和用 Chirp 变换算法得到的离散时间尺度变换信号。图 3 分别给出了 Chirp 变换、sinc 插值和 CMC 三种算法结果与理想时间尺度变换信号的误差。从图中可以看出,三种算法均很好地实现了离散时间尺度变换。sinc 插值算法误差最小,最大误差约为 0.02,这主要是由 sinc 函数截断所致,这种算法的运算量最大。Chirp 变换算法误差趋势与 sinc 插值算法相同,都是在信号的边缘处相对较大,但最大误差约为 0.04,大于 sinc 插值算法,这主要是(5)式的近似带来的。但 Chirp 变换算法运算量远小于 sinc 插值算法。CMC 算法误差呈正弦震荡趋势,与 Chirp 算法与 sinc 插值算法趋势不同,这主要是尺度变换原理不同所致。CMC 算法最大误差约为 0.035。由上面的分析可知,Chirp 变换算法误差相对其它典型算法并不大,但运

算效率明显提高,是一种合适的离散时间尺度变换算法。

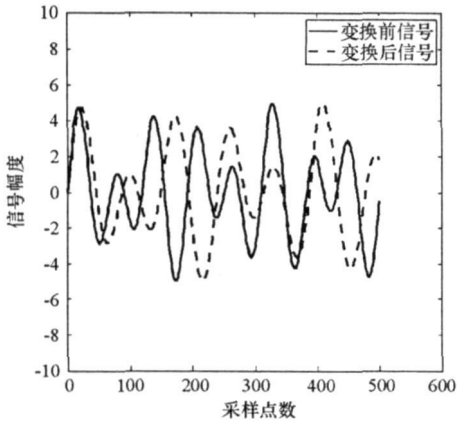


图2 原始信号与基于 Chirp 变换的离散时间尺度变换结果

Fig. 2 The original signal and the discrete time scale transformation result based on the Chirp transform

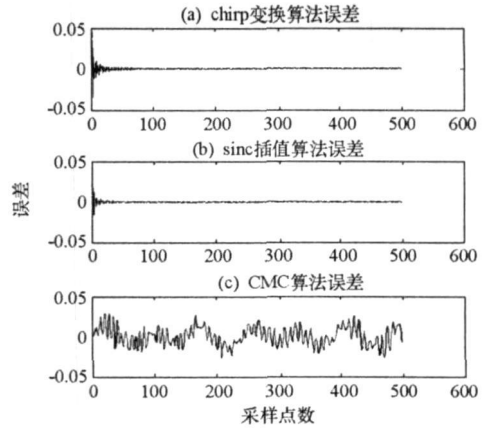


图3 不同算法误差比较结果

Fig. 3 The error results by different algorithms

4 结束语

本文提出了一种新的快速离散时间尺度变换算法,构造了离散时间尺度变换表达式,并证明了所构造的表达式与通过理想插值得到的表达式几乎完全一致。用 Chirp 变换实现了构造表达式的快速运算,给出了具体的实现流程。性能分析表明,算法对采样率没有额外的要求,克服了一些快速算法对采样率的限制。给出了算法所需的总的复数乘法次数,通过与典型的算法运算量的比较证实了算法的有效性。

参考文献:

- [1] Durand L G, Zhang X. Application of the Matching Pursuit Method for the Time-scale Transformation of the Phonocardiogram[C]// Annual Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 1996,3: 1033- 1034.
- [2] 比约诺. 信号处理和水声学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1985.
- [3] Mättemayer J, Moreira A, Loffeld O. Spotlight SAR Data Processing Using the Frequency Scaling Algorithm[J], IEEE Trans. Geosc. Remote Sensing, 1999, 37(5): 2198- 2214.
- [4] 李素芝, 万建伟. 时域离散信号处理[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1994.
- [5] Cohen L. Time-frequency Analysis[M]. Englewood Cliff, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [6] 朱晓光, 洪炳熔, 王东木. 基于连续小波理论的时间尺度变换实现[J]. 系统工程与电子技术, 1999, 21, (12): 11- 13.
- [7] Papoulis A. Systems and Transforms with Applications in Optics[M]. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [8] Morgan D P, Surface-wave Devices for Signal Processing[M]. The Netherlands: Elsevier Science Publishers, 1985.