

文章编号: 1001- 2486(2007) 05- 0081- 04

一种时域标量场平面波算法的改进方法*

刘 锋, 周东明, 贺文辉, 任 猛, 何建国

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 基于现有时域平面波(PWTD)算法, 提出了一种对时域标量场平面波算法的改进方法。此方法将现有算法中的插值计算改为制表查询, 并给出了其最大误差。另外, 还将现有算法中转移算子中对时间求导提到算法最外层, 将原先所需的 $(K+1)(2K+1)$ 次 FFT 和 IFFT 计算减少为一次 FFT 和 IFFT 计算。最后算例证明当算法选取适当参数值时, 可获得需要的计算精度, 并验证了改进算法所需计算时间远少于现有算法。

关键词: 时域平面波(PWTD); 标量场; 转移算子

中图分类号: TN95 **文献标识码:** A

An Improved Method of Plane-wave Time-domain Algorithm of Scalar Field

LIU Feng, ZHOU Dong-ming, HE Wen-hui, REN Meng, HE Jian-guo

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: An improved method of plane-wave time-domain algorithm (PWTD) of scalar field based on the present PWTD algorithm is presented. With this method, computation of interpolated function was transformed to tabulation of the interpolated function, and the maximum error was presented. Additionally the derivative operation in translation operator was placed on the outmost, which reduces original $(K+1)(2K+1)$ times operation of FFT and IFFT to one time. Consequently the cost associated with the computation was decreased. Two examples were presented to demonstrate the accuracy and high efficiency of the improved algorithm.

Key words: plane-wave time domain(PWTD); scalar field; translation operator

瞬态电磁场的分析主要基于两种方法: 积分方程法和微分方程法。在分析面散射问题时, 积分方程法只需要对目标表面进行剖分, 而微分方程法则需要对整个区域进行剖分, 前者在涉及的计算量和占用计算机内存量上表现出了显著的优势, 所以时域积分方程的快速数值求解获得了广泛关注。时间递推方法(Matching On in Time, MOT)是数值求解时域积分方程的最常用方法^[1], 然而, 因为经典的时间递推方法计算量大并且数值结果存在晚时不稳定的现象, 导致它并未获得广泛应用。上世纪 90 年代前期, 众多的学者研究了引起时间递推方法数值解晚期不稳定的原因, 提出了很多克服的办法^[2], 这样一来, 计算量就成了限制该方法应用的瓶颈。Michielssen 等人提出一种用时域平面波(PWTD)加速时间递推算法的方法^[7], 该方法的思路同频域快速多极方法类似^[8], 将离散的源分组, 并按组间的距离分为近组和远组, 近组之间的相互作用仍然用传统的时间递推方法计算, 远组作用则用平面波方法计算。采用 PWTD 算法计算远组之间的作用大大降低了用时间递推方法处理瞬态电磁问题的计算量。采用 PWTD 加速的 MOT 方法需要的计算量单层为 $O(N_t N_s^{1.5} \log N_s)$, 多层为 $O(N_t N_s \log^2 N_s)$, 较传统方法所需 $O(N_t N_s^2)$ 的计算量有了大幅降低。其中, N_t 为分析的时间步数, N_s 为目标表面离散的空间基函数的总个数。虽然如此, 采用 PWTD 方法的单步计算量却很大, 为了减少 PWTD 方法加速 MOT 计算矢量场的单步计算量, 这里探讨了减少三维空间标量场的 PWTD 算法单步计算量的方法。首先介绍了三维空间标量场的时域平面波算法, 然后针对算法中重复耗时的插值计算做了改进, 并将算法中转移算子的求导运算放到最外层, 采用一次 FFT 和 IFFT 实现。接下来给出具体算例, 对结果进行分析, 最后给出结论。

* 收稿日期: 2007- 03- 12

作者简介: 刘锋(1979-), 男, 博士生。

1 三维空间标量场的时域平面波算法

1.1 三维空间标量场的时域平面波解析表达式

时间和空间变化为 $q(\mathbf{r}'_s, t)$ 的源分布在半径为 R_s 的球内, 待计算的场点位于另一个相同半径的球内。源所在的球(以下简称源球)和场点所在的球(以下简称场球)的球心的坐标矢量分别记为 \mathbf{r}_s^c 和 \mathbf{r}_o^c 。连接两球心的矢量记为 \mathbf{R}_c , $\mathbf{R}_c = \mathbf{r}_o^c - \mathbf{r}_s^c$ 。取 $|\mathbf{R}_c| > 2R_s$ 以保证源球和场球不交叠。假设 $q(\mathbf{r}_s, t)$ 为近似带限信号, 带宽为 ω_{\max} , 那么它可表示为一系列子信号的和, 即 $q(\mathbf{r}'_s, t) = \sum q_l(\mathbf{r}'_s, t)$ 。相应地, 场点 \mathbf{r}_o 处的标量场 $u(\mathbf{r}_o, t)$ 也可表示为一系列子信号的和, 即 $u(\mathbf{r}_o, t) = \sum u_l(\mathbf{r}_o, t)$, 子场信号由相应的子源信号产生。当 \mathbf{r}_s^c 和 \mathbf{r}_o^c 的距离足够远时, 子场信号可由下面的准子场信号通过在时域加窗获得^[7]。

$$u_l(\mathbf{r}_o, t) = -\frac{\partial_t}{8\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{V_s} d\mathbf{r}'_s q_l \left[\mathbf{r}'_s, t - \frac{\mathbf{k}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}'_s)}{c} \right] \quad (1)$$

假设 $q_l(\mathbf{r}'_s, t)$ 是一点源, 则 $q_l(\mathbf{r}'_s, t) = f_l(t) \delta(\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}_s)$, 上式可简化为

$$u_l(\mathbf{r}_o, t) = -\frac{\partial_t}{8\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta f_l \left[t - \frac{\mathbf{k}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)}{c} \right] \quad (2)$$

选取子源信号的长度

$$T_s < (R_c - 2R_s) / c \quad (3)$$

可以保证

$$u_l(\mathbf{r}_o, t) = \begin{cases} 0, & t < T_{l, \text{step}} \\ \tilde{u}_l(\mathbf{r}_o, t), & t \geq T_{l, \text{step}} \end{cases} \quad (4)$$

其中, $T_{l, \text{step}}$ 是第 l 段子信号结束的时刻。

1.2 三维空间标量场的时域平面波离散表达式

式(2)是推导三维空间标量场时域平面波离散表达式的基本式。在实际计算时, 都假设源分布 $q(\mathbf{r}_s, t)$ 是时限的, 如 $f(t)$ 的时间谱在 $\omega > \omega_{\max}$ 时消失, 所以, $f(t)$ 可用时限函数通过采样和插值得到

$$f(t) \cong \sum_{k=0}^{M_t-1} f(k \Delta t) p_k(t) \quad (5)$$

其中, Δt 是时间步长, M_t 为总的采样点数, $p_k(t)$ 是带限插值函数, 采用近似长椭圆插值函数^[19], 定义为

$$p_k(t) = \frac{\omega_0}{\omega_s} \frac{\sin[\omega_0(t - k \Delta t)]}{\omega_0[t - k \Delta t]} \cdot \frac{\sinh\left[\frac{\pi}{2} p_i \left(1 - 1/x_0\right) \sqrt{1 - [(t - k \Delta t)/p_i \Delta t]^2}\right]}{\sinh\left[\frac{\pi}{2} p_i \left(1 - 1/x_0\right)\right] \sqrt{1 - [(t - k \Delta t)/p_i \Delta t]^2}} \quad (6)$$

其中,

$$\omega_s = \mathbb{J} \Delta t = x_0 \omega_{\max} \quad \omega_0 = (\omega_s + \omega_{\max}) / 2 \quad (7)$$

x_0 为过采样率, p_i 是整数, 它定义插值函数近似持续时间的步数。在实际应用中, 常采用截断的 $p_k(t)$ 的形式, 即当 $|t - k \Delta t| > p_i \Delta t$ 时 $p_k(t) = 0$ 。

注意到 $\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s = (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_o^c) + (\mathbf{r}_o^c - \mathbf{r}_s^c) - (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_s^c)$, 式(2)可写为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_l(\mathbf{r}_o, t) = & -\frac{\partial_t}{8\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \delta \left[t - \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_o^c)}{c} \right] \\ & \cdot \delta \left[t - \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_o^c - \mathbf{r}_s^c)}{c} \right] \cdot \delta \left[t + \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_s^c)}{c} \right] \cdot f_l(t) \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式中的积分可以通过下面的数值方法完成。

$$\tilde{u}_l(\mathbf{r}_o, t) = \partial_t \sum_{p=0}^K \sum_{q=-K}^K \omega_{pq} \delta \left[t - \frac{\mathbf{k}_{pq} \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s^c)}{c} \right] \cdot \delta \left[t - \frac{\mathbf{k}_{pq} \cdot (\mathbf{r}_o^c - \mathbf{r}_s^c)}{c} \right] \cdot \delta \left[t + \frac{\mathbf{k}_{pq} \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_s^c)}{c} \right] \cdot f_l(t) \quad (9)$$

其中,

$$\omega_{pq} = \frac{4\pi(1 - \cos^2\theta_p)}{(2K+1)[(K+1)P_K(\cos\theta_p)]^2} \quad \hat{\mathbf{k}}_{pq} = \hat{\mathbf{x}}\sin\theta_p\cos\phi_q + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta_p\sin\phi_q + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta_p \quad (10)$$

$$\phi_q = q \cdot 2\pi / (2K+1) \quad K = \lceil x_1 \cdot 2R_s \omega_{\max} / c \rceil$$

式中, θ_p 是 $P_{K+1}(\cos\theta)$ 的 $(p+1)$ 阶零点, $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整, x_1 是空间过采样率。

如果 $q_l(\mathbf{r}'_s, t)$ 不是一个点源, 则式(9)变为

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{r}_o, t) = & \partial_t \sum_{p=0}^K \sum_{q=-K}^K \omega_{pq} \delta\left[t - \frac{\hat{\mathbf{k}}_{pq} \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s^c)}{c}\right] \cdot \delta\left[t - \frac{\hat{\mathbf{k}}_{pq} \cdot (\mathbf{r}_o^c - \mathbf{r}_s^c)}{c}\right] \\ & \cdot \int_{V_s} d\mathbf{r}'_s \delta\left[t + \frac{\hat{\mathbf{k}}_{pq} \cdot (\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}_s^c)}{c}\right] \cdot q_l(\mathbf{r}'_s, t) \end{aligned} \quad (11)$$

上式就是三维空间标量场的时域平面波离散表达式。

2 算法的改进

2.1 改进的插值计算

在利用式(11)计算所有场点的标量场时, 要进行 $(K+1)(2K+1)N_s T_s \cdot 2p_t$ 次式(6)的插值计算 (N_s 是场点个数, T_s 是计算的时间步数)。为了减少计算时间, 本文将式(6)的插值计算改用查表的方法, 将每个 Δt 进一步细分成 N 等份, 每一小份为 $\Delta t/N$, 由于 $p_k(t)$ 关于 $k\Delta t$ 对称, 则有效时间长度 $p_t \Delta t$ 就可等分为 $p_t N$ 份。每份对应的插值为

$$p(n) = p_k \left[\frac{n\Delta t}{N} + k\Delta t \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots, p_t N \quad (12)$$

并将 $p(n)$ 制成表格。经过上述处理后, 式(6)的复杂计算就简化为查表, 这大大减少了计算时间。这样处理后带来的最大误差为 $\max\left\{\frac{d}{dt}p_k(t)\right\} \cdot \frac{\Delta t}{N}$ 。

2.2 改进的四步法完成远组计算

第一步, 计算式(11)中最右边的积分, 即

$$q_l^{out}(\hat{\mathbf{k}}_{pq}, t) = \int_{V_s} d\mathbf{r}'_s \delta\left[t + \frac{\hat{\mathbf{k}}_{pq} \cdot (\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}_s^c)}{c}\right] \cdot q_l(\mathbf{r}'_s, t) \quad (13)$$

上式就是对源的斜堆积变换(Slant Stack Transform, SST), 变换后得到的量 $q_l^{out}(\hat{\mathbf{k}}_{pq}, t)$ 为出射射线。

第二步, 计算式(11)中间的卷积, 即

$$u_l^{in}(\hat{\mathbf{k}}_{pq}, t) = \delta\left[t - \frac{\hat{\mathbf{k}}_{pq} \cdot (\mathbf{r}_o^c - \mathbf{r}_s^c)}{c}\right] \cdot q_l^{out}(\hat{\mathbf{k}}_{pq}, t) \quad (14)$$

上式是通过转移算子 $\delta\left[t - \frac{\hat{\mathbf{k}}_{pq} \cdot (\mathbf{r}_o^c - \mathbf{r}_s^c)}{c}\right]$ 将每个方向的出射射线从源球转移到场球, 所得到的量 $u_l^{in}(\mathbf{r}, t)$ 为入射射线。

第三步, 计算式(11)最左边的卷积并求和, 即将投影到场点的所有方向的射线叠加。

$$u_l^{dl, in}(\mathbf{r}_o, t) = \sum_{p=0}^K \sum_{q=-K}^K \omega_{pq} \delta\left[t - \frac{\hat{\mathbf{k}}_{pq} \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s^c)}{c}\right] \cdot u_l^{in}(\hat{\mathbf{k}}_{pq}, t) \quad (15)$$

第四步, 计算式(11)最外层的对时间求导: $\tilde{u}_l(\mathbf{r}_o, t) = \partial_t u_l^{dl, in}(\mathbf{r}_o, t)$, 该式可写成下面的等价表达式

$$\tilde{u}_l(\mathbf{r}_o, t) = \partial_t \left[\delta(t) * u_l^{dl, in}(\mathbf{r}_o, t) \right] \quad (16)$$

式(16)可以通过快速傅立叶和反傅立叶变换来计算。通过选择适当的子信号长度和对应的时窗, 即 T_s , 必须满足式(3), 以及 $t > IT_s$, 真实的场可以从式(16)获得。

同目前其他学者采用的方法^[7]相比, 由于本文将现有算法中的插值计算改为制表查询, 这将现有算法所进行的 $(K+1)(2K+1)N_s T_s \cdot 2p_t$ 次对式(6)的插值计算减少为 Np_t 次插值计算和 $(K+1)(2K+1)N_s T_s \cdot 2p_t$ 次查表。而计算机进行一次查表所花费的时间远少于计算一次插值函数所花费的时间。另外, 还将现有算法中转移算子中对时间求导运算提到算法最外层, 将原先转移算子所需 $(K+1)(2K+1)$ 次

FFT 和 IFFT 计算降为最后一次 FFT 和 IFFT 计算。显然, 这些方法都极大减少了计算量, 节省了计算时间。

3 数值验证

为验证改进算法的计算精度和减少计算时间, 设计了两个实例。第一个算例验证改进后的算法通过选取适当参数可获得需要的数值计算精度。第二个算例将本文方法同现有算法的计算时间做了对比。

在两个算例中, 设定源球和场球的半径都为 1m, 球心坐标分别为(0, 0, 0)和(0, 0, 20m)。共有 50 个均匀分布在源球表面的点源, 它们是 $g(t) = e^{-(t-7.75\sigma)^2/2\sigma^2}$ 的脉冲信号, 其中 σ 取为 2.12ns, N 取 1000。在实际应用中, 这一信号可以近似认为是带宽为 $\omega_{\max} = 600\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$ 的信号。

验证计算精度时, 场点位于(0, 0, 21m), 归一化误差定义为计算值和理论值之差的 L2 范数除以理论值的 L2 范数。如图 1 所示, 对于相同 p_t 值, 误差随着 K 的增加先成指数下降, 然后趋于稳定; 随着 p_t 的增加, 误差曲线下降。所以, 适当选择 K, p_t 可使计算达到较高精度。比较本文方法同现有算法计算时间时, 场点共取 50 个, 均匀分布在场球表面。从图 2 可看出, 本文方法所花费的时间要远少于现有算法。

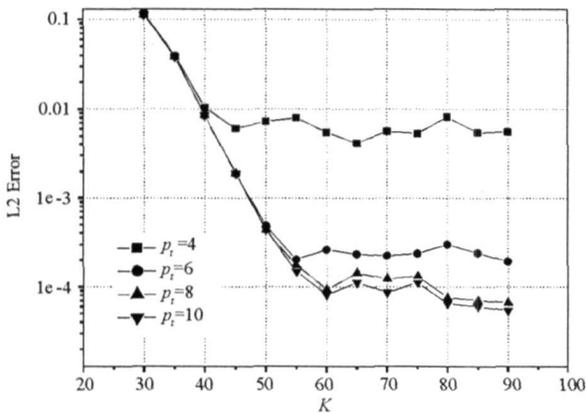


图 1 不同 p_t 时, 误差随 K 变化的曲线

Fig. 1 L2 error with respect to p_t and K

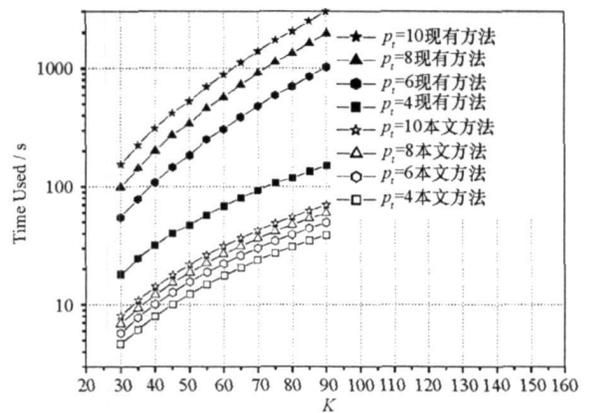


图 2 两种方法取不同 p_t 时, 计算时间随 K 变化的曲线

Fig. 2 Used time with respect to methods, p_t and K

4 结束语

本文将现有时域平面波算法中的插值计算改为制表查询。并将改进前转移过程所需 $(K+1)(2K+1)$ 次 FFT 和 IFFT 计算减为计算求导所需的一次 FFT 和 IFFT 计算。通过算例验证了改进后的算法可通过适当选取 K, p_t 两个参数的值获得需要的数值精度, 而计算需要的时间远少于现有时域平面波算法。

参考文献:

- [1] Bennett C L. A Technique for Computing Approximate Impulse Response for Conducting Bodies[R]. Doctor. Lafayette, Indiana: Purdue Univ., 1968.
- [2] Vechinski D A, Rao S M. A Stable Procedure to Calculate the Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1992, 40: 661- 665.
- [3] Pinello W, Ruehli A, Cangellanis A. Stabilized of Time Domain Solutions of EFIE Based on Partial Element Equivalent Circuit Models[C]//IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Montreal, Canada, 1997.
- [4] Davies P J. A Stability Analysis of a Time Marching Scheme for the General Surface Electric Field Integral Equation[J]. Appl. Numer. Math. 1998, 27: 35- 37.
- [5] Bluck M J, Walker S P. Time domain BIE Analysis of Large Three Dimensional Electromagnetic Scattering Problems[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1997, 45: 894- 901.
- [6] Dodson S, Walker SP, Bluck M J. Implicitness and Stability of Time Domain Integral Equation Scattering Analysis[J]. Appl. Comp. Electromagn. Soc. J. 1998, 13: 291- 301.
- [7] Ergin A A, Shanker B, Michielssen E. The Plane Wave Time Domain Algorithm for the Fast Analysis of Transient Wave Phenomena[J]. IEEE Antennas Propag. Mag., 1999, 41: 39- 52.
- [8] 董健, 柴顺连, 毛俊杰. 结合多层快速多极和 ILUT 预处理算法分析复杂目标的电磁特性[J]. 国防科技大学学报, 2005, 27(6): 82- 87.
- [9] Krab J J. Interpolation of Band-limited Functions Using the Approximate Prolate Series[J]. IEEE Trans. Information Theory, 1979, 25: 717- 720.