

文章编号: 1001- 2486(2007) 05- 0089- 06

机动目标跟踪误差 CRLB 计算与分析*

占荣辉, 郁春来, 辛 勤, 万建伟

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 克拉美- 罗下限 (CRLB) 作为参数估计所能达到的最低误差限, 常被用来衡量算法估计性能的优劣程度。以转弯机动为例, 研究了有源 (主动) 和无源 (被动) 两种观测条件下目标跟踪 CRLB 计算的一般方法, 并通过矩阵理论分析了目标机动可能引起的 CRLB 突变的原因, 为机动目标跟踪的算法性能评估提供了有效手段。最后给出了仿真算例。

关键词: 转弯机动; 目标跟踪; 参数估计; CRLB

中图分类号: TN957. 51 **文献标识码:** B

CRLB Calculation and Analysis for Maneuvering Target Tracking

ZHAN Rong-hui, YU Chun-lai, XIN Qin, WAN Jian-wei

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: As a lower bound on mean square error of parameter estimate, the Cramér-Rao lower bound (CRLB) is generally used to decide to what degree a suboptimal estimate method is close to its optimal fashion. With the assumption of coordinated turn maneuver, a generic approach for target tracking CRLB calculation was investigated under the conditions of active and passive measurement, and the essential reason for possible CRLB's sudden increase caused by maneuver was also analyzed from the perspective of matrix theory, which provides an effective measurement for performance assessment of estimate methods used in maneuvering target tracking. Finally, simulation example for CRLB calculation was presented.

Key words: coordinated turn maneuver; target tracking; parameter estimate; CRLB

与非机动目标相比, 机动条件下的目标运动状态变得尤为复杂, 因此, 对机动目标的跟踪在近 30 年中一直是目标跟踪领域的一大研究热点^[1-6]。为达到理想的跟踪效果, 人们提出各种各样的估计算法, 比较典型的有输入估计 (IE)^[1]、变维滤波 (VDF)^[2]、交互多模 (IMM)^[4] 以及基于神经网络的跟踪算法^[9] 等。显然, 这些算法都有其自身的优点和缺陷, 且其性能也不尽相同。但遗憾的是, 由于机动问题本身的复杂性, 目前还没有统一的评估标准来衡量各种次优跟踪算法的优劣程度。本质上, 目标跟踪是给定观测条件下的状态估计问题, 其最优估计算法所能达到的理论误差下限为克拉美- 罗下限 (CRLB), 它表明了各种次优算法的性能以及这些算法还有多少改进的余地。因此, 研究机动目标跟踪的 CRLB 对有效评估各种算法的性能具有重要意义。有鉴于此, 本文将转弯机动模型为例, 分析在有源 (主动) 和无源 (被动) 两种观测条件下目标跟踪的 CRLB 计算问题, 并给出具体的仿真实例, 说明最优算法条件下所能达到的跟踪性能。

1 运动模型

假定目标在 $x-y$ 平面内作转弯机动运动, 其初始位置和速度分别用 (x_0, y_0) 和 (x_0, y_0) 表示。为分析方便, 假定在观测时间内目标的运动分为三段: 在 t_0 时刻, 目标以一定的初始速度作匀速运动, 并保持这一运动状态至 t_s (t_s 为机动开始时刻); 随后, 目标以某一转弯率 w 开始机动, 直至 $t_s + T_d$ (T_d 为机动持续时间) 时刻机动结束; 最后, 目标以机动后的状态继续作匀速运动。于是, 目标的运动状态可描

* 收稿日期: 2007- 02- 01

基金项目: 国家部委基金资助项目 (51421040104KG01)

作者简介: 占荣辉 (1978-), 男, 博士生。

述为^[7]

$$t_0 \leq t < t_s, \quad \begin{cases} x_t = x_0 + (t - t_0) \dot{x} \\ y_t = y_0 + (t - t_0) \dot{y} \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = \dot{y}_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$t_s \leq t \leq t_s + T_d, \quad \begin{cases} x_t = x_0 + (t_s - t_0) \dot{x}_0 + \frac{\sin \omega(t - t_s)}{\omega} \dot{x}_0 + \frac{\cos \omega(t - t_s) - 1}{\omega} \dot{y}_0 \\ y_t = y_0 + (t_s - t_0) \dot{y}_0 + \frac{1 - \cos \omega(t - t_s)}{\omega} \dot{x}_0 + \frac{\sin \omega(t - t_s)}{\omega} \dot{y}_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \cos \omega(t - t_s) - \dot{y}_0 \sin \omega(t - t_s) \\ \dot{y} = \dot{x}_0 \sin \omega(t - t_s) + \dot{y}_0 \cos \omega(t - t_s) \end{cases} \quad (2)$$

$$t > t_s + T_d, \quad \begin{cases} x_t = x_0 + (t_s - t_0) \dot{x}_0 + \frac{\sin(\omega T_d)}{\omega} \dot{x}_0 + \frac{\cos(\omega T_d) - 1}{\omega} \dot{y}_0 \\ \quad + (t - t_s - T_d) [\dot{x}_0 \cos(\omega T_d) - \dot{y}_0 \sin(\omega T_d)] \\ y_t = y_0 + (t_s - t_0) \dot{y}_0 + \frac{1 - \cos(\omega T_d)}{\omega} \dot{x}_0 + \frac{\sin(\omega T_d)}{\omega} \dot{y}_0 \\ \quad + (t - t_s - T_d) [\dot{x}_0 \sin(\omega T_d) + \dot{y}_0 \cos(\omega T_d)] \\ \dot{x} = \dot{x}_{s+T_d} = \dot{x}_0 \cos(\omega T_d) - \dot{y}_0 \sin(\omega T_d) \\ \dot{y} = \dot{y}_{s+T_d} = \dot{x}_0 \sin(\omega T_d) + \dot{y}_0 \cos(\omega T_d) \end{cases} \quad (3)$$

由式(1)~(3)可知,在不同时刻,目标的状态 $x_t = [x_t \ \dot{x} \ y_t \ \dot{y}]^T$ 可由不同的参数矢量 θ 来表征(即目标状态可通过充分统计量 θ 唯一确定),且其对应关系可表示为

$$\theta = \begin{cases} \theta_{\text{I}} & t_0 \leq t < t_s \\ \theta_{\text{II}} & t_s \leq t \leq t_s + T_d \\ \theta_{\text{III}} & t > t_s + T_d \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\theta_{\text{I}} = [x_0 \ \dot{x}_0 \ y_0 \ \dot{y}_0]^T$, $\theta_{\text{II}} = [x_0 \ \dot{x}_0 \ y_0 \ \dot{y}_0 \ t_s \ \omega]^T$, $\theta_{\text{III}} = [x_0 \ \dot{x}_0 \ y_0 \ \dot{y}_0 \ t_s \ \omega T_d]^T$ 。

2 观测模型

根据不同的应用背景,通常需要获取不同的观测量。在有源(主动)目标跟踪中,一般需要测量目标的方位角和距离,此时的观测方程可表示为

$$z_k = h(\theta, t_k) + \mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} \beta_k \\ r_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan(y_k/x_k) \\ \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_\beta \\ n_r \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中, (x_k, y_k) 为 t_k 时刻目标与观测器的相对位置, n_β 和 n_r 为相互独立的零均值高斯噪声,其协方差矩阵 $\mathbf{R}_k = \text{diag}\{\sigma_\beta^2, \sigma_r^2\}$ 。

而在无源(被动)目标跟踪中,为了增强系统的可观测条件并降低对观测器本身的机动性要求^[8],通常除了观测目标的方位角之外还需要获得其它观测量。若考虑目标的方位角和多普勒频率为观测量,则可得到如下的观测方程

$$z_k = h(\theta, t_k) + \mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} \beta_k \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan(y_k/x_k) \\ f_0 \left(1 - \frac{x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k}{c \sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_\beta \\ n_f \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, f_0 为辐射源频率, c 为光速, (\dot{x}_k, \dot{y}_k) 为目标与观测器的相对速度; n_β 和 n_f 为相互独立的零均值高斯噪声,其协方差矩阵 $\mathbf{R}_k = \text{diag}\{\sigma_\beta^2, \sigma_f^2\}$ 。

3 CRLB 计算和分析

假设到 t 时刻为止, 所获得的观测量为 $z_k = z(t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, l$), $t_l \leq t$; 同时用 θ_t 表示该时刻参数 θ 的无偏估计, 则由统计理论可知, 参数 θ 的估计误差 CRLB 满足^[9]

$$E[(\theta_t - \theta)(\theta_t - \theta)^T] \geq \text{CRLB}_t(\theta) = J_t^{-1}(\theta) \quad (7)$$

式中, $J_t(\theta)$ 为 Fisher 新息矩阵(FIM) 且 $J_t(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln p(z_{1:l} | \theta)}{\partial \theta}\right] \left[\frac{\partial \ln p(z_{1:l} | \theta)}{\partial \theta}\right]^T\right\}$; $z_{1:l} \triangleq \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$, 为到 t ($t_l \leq t$) 时刻为止的累积观测量。

由独立观测条件知, $p(z_{1:l} | \theta) = \prod_{k=1}^l p(z_k | \theta)$, 于是有

$$J_{t_l}(\theta) = \sum_{k=1}^l E\left\{\left[\frac{\partial \ln p(z_k | \theta)}{\partial \theta}\right] \left[\frac{\partial \ln p(z_k | \theta)}{\partial \theta}\right]^T\right\} \quad (8)$$

进一步由观测模型 $z_k \sim \mathcal{N}(h(\theta, t_k), R_k)$ 易得

$$\frac{\partial \ln p(z_k | \theta)}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial h(\theta, t_k)}{\partial \theta}\right]^T R_k^{-1} [z_k - h(\theta, t_k)] \quad (9)$$

$$J_{t_l}(\theta) = \sum_{k=1}^l \left[\frac{\partial h(\theta, t_k)}{\partial \theta}\right]^T R_k^{-1} \left[\frac{\partial h(\theta, t_k)}{\partial \theta}\right] \quad (10)$$

需要指出的是, 在不同时刻参数 θ 的维数可能不同, 由此导致的式(10) 可能代表不同维数的矩阵。因此, 如何得到所需的 $J_t(\theta)$ 成为计算误差下限的关键。显然, 当 $t_0 \leq t < t_s$ 时, $J_t(\theta)$ 的计算较为简单。下面以第二段航迹为例, 详细说明 $J_t(\theta)$ 的计算过程。

很明显, 在 $t_s \leq t \leq t_s + T_d$ 时间内, 所获得的观测量包含了目标在两种不同运动状态条件下的信息。假定到 t_s 时刻为止所获得的观测量为 $z_1 \sim z_m$, 则在当前时刻 t_n ($t_s < t_n \leq t$), $J_{t_n}(\theta)$ 可表示为

$$J_{t_n}(\theta) = \begin{bmatrix} J_{t_s}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + A \quad (11)$$

其中, $J_{t_s}(\theta) = \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial h(\theta_s, t_k)}{\partial \theta_s}\right]^T R_k^{-1} \left[\frac{\partial h(\theta_s, t_k)}{\partial \theta_s}\right]$, $A = \sum_{k=m+1}^n \left[\frac{\partial h(\theta_{II}, t_k)}{\partial \theta_{II}}\right]^T R_k^{-1} \left[\frac{\partial h(\theta_{II}, t_k)}{\partial \theta_{II}}\right]$ 。

同理, $t > t_s + T_d$ 条件下的 $J_t(\theta)$ 可用类似的方法求得。

为进一步说明参数矢量维数变化对 CRLB 的影响, 仍然以第二段航迹为例, 为此先将式(11) 中的矩阵 A 分块得

$$A = \begin{bmatrix} B_{4 \times 4} & C_{4 \times 2} \\ (C^T)_{2 \times 4} & D_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

当 $E = J_{t_s}(\theta) + B$ 和 $\Delta_E = D - C^T E^{-1} C$ 可逆时, 由块矩阵求逆公式可得

$$J_{t_n}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} E^{-1} + E^{-1} C \Delta_E^{-1} C^T E^{-1} & -E^{-1} C \Delta_E^{-1} \\ -\Delta_E^{-1} C^T E^{-1} & \Delta_E^{-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

由此可见, 参数矢量维数的变化(即引入了新的待估参量)会引起 FIM 结构的变化, 从而导致目标状态 x 估计误差 CRLB 的变化。不过, 式(13) 给出的仅为依赖于具体问题的隐含表达式, 因此要定量分析 CRLB 的变化是不容易的。但尽管如此, 还是可以通过该式来解释新的未知参量对 CRLB 的影响。实际上, 由上式不难看出, 若机动参数(这里指 t_s 和 ω) 已知, $J_{t_n}^{-1}(x)$ 应为 E^{-1} , 而实际上由于机动参数未知, $J_{t_n}^{-1}(x)$ 变为 $E^{-1} + E^{-1} C \Delta_E^{-1} C^T E^{-1}$ 。很明显, Δ_E^{-1} 的对角元素代表机动参数的估计误差下限, 因此理论上矩阵 Δ_E^{-1} 是一对称、正定矩阵。这样, 矩阵

$$E^{-1} C \Delta_E^{-1} C^T E^{-1} = (E^{-1} C) \Delta_E^{-1} (E^{-1} C)^T \quad (14)$$

至少是半正定阵, 即 $E^{-1} > E^{-1} + E^{-1} C \Delta E^{-1} C^T E^{-1}$ 始终成立。这就说明, 新的未知参数的引入会使状态估计的CRLB增大。

在实际问题中, 有时感兴趣的参数是待估参数矢量 θ 的函数, 如 $\phi_i = g(\theta, t)$ 。此时, 参数 ϕ_i 的估计误差下限可表示为^[9]

$$E[(\phi_i - \hat{\phi}_i)(\phi_i - \hat{\phi}_i)^T] \geq \text{CRLB}_i(\phi) = \mathbf{G}_i \mathbf{J}_i^{-1}(\theta) \mathbf{G}_i^T \quad (15)$$

其中, $\mathbf{G}_i = \frac{\partial g(\theta, t)}{\partial \theta}$ 。由此, 可以通过式(15)求得目标距离 $(r(t) = g(\theta, t) = \sqrt{x_i^2 + y_i^2})$ 、目标速度 $(v(t) = g(\theta, t) = \sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2})$ 或其它感兴趣参量估计误差的CRLB。

4 仿真实例

考虑 $x-y$ 平面内的机动目标跟踪问题, 在满足系统可观测^[10]的前提下, 假定目标初始位置 $(x_0, y_0) = (40, 70)$ km, 观测器固定于坐标原点。在 0~120s 时间内, 目标以初始速度 $(\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (0, -240)$ m/s 开始作匀速运动; 之后, 目标开始作 90° 转弯运动, 转弯率 $w = 1.5^\circ/\text{s}$, 机动持续时间为 60s; 最后, 目标以机动后的速度继续作匀速运动, 持续时间为 120s。

对两种不同应用背景下的目标跟踪问题进行分析: 在有源观测条件下, 方位角和距离的测量精度分别为 $\sigma_\beta = 5\text{mrad}$ 和 $\sigma_r = 100\text{m}$; 在无源跟踪条件下, 假定 $f_0 = 3\text{GHz}$, 方位角和多普勒频率的观测精度分别为 $\sigma_\beta = 5\text{mrad}$ 和 $\sigma_f = 10\text{Hz}$ 。在仿真中, 观测周期取为 1s 和 2s, 两种观测条件下得到的距离和速度估计误差CRLB如图1、图2所示。

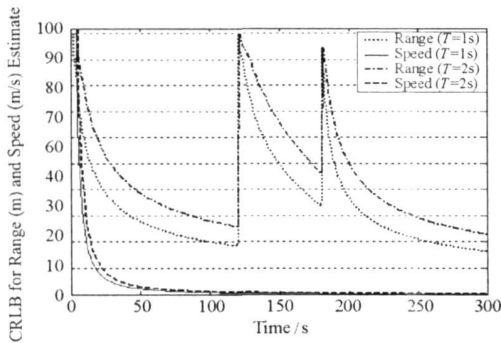


图1 距离和速度估计误差CRLB(有源跟踪)

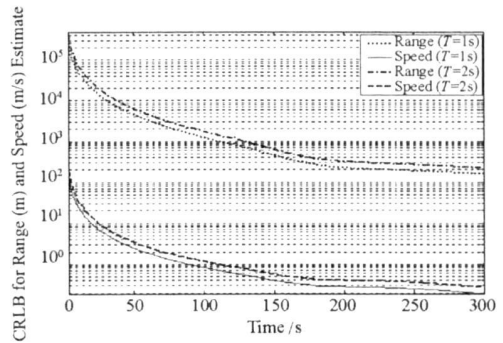


图2 距离和速度估计误差CRLB(无源跟踪)

Fig. 1 CRLBs of position and speed estimate (active tracking) Fig. 2 CRLBs of position and speed estimate (passive tracking)

由图1可以看出, 在目标机动前, 随着观测量的累积, 距离和速度估计误差CRLB不断减小, 同时可以看到, 随着机动的到来, 距离估计精度严重下降。这是因为, 在目标机动时间内, 需要对机动开始时间 t_s 和转弯率 ω 进行估计, 但尽管如此, 在目标机动阶段, 距离跟踪精度仍高于直接测量精度(这里指 $\sigma_r = 100\text{m}$), 同样, CRLB随着观测量的不断累积而下降。由图中还可以发现, 当机动结束后, 距离估计误差再次增大。这是因为, 此时需要估计目标的机动持续时间, 待估参量维数的变化导致跟踪精度下降。相比之下, 速度估计精度在机动前后变化并不明显。究其原因, 其一是在仿真模型中, 速度的大小在整个运动过程中始终保持不变; 其二是在机动开始前, 速度估计已达到较高的精度, 误差的微小变化很难区别。此外, 正如图中所示, 减小测量周期有利于提高距离和速度的估计精度。一个基本的原因是, 随着测量周期的减小, 在同样长度的时间段内, 就可以获得更多的观测信息, 也就得到了目标状态变化更细致的描述, 从而提高跟踪性能。

在无源跟踪条件下, 由于不能直接测得目标的距离, 在先验信息不多的情况下距离估计的初始误差将会很大, 这一点可以从图2中清楚地看到。与有源跟踪相同的是, 图2中的距离和速度估计误差CRLB也随着观测量的积累而降低。但在无源跟踪中, 无论是距离还是速度估计误差在目标机动前后都

没有明显的变化。理论上, 这是由式(13)和式(15)矩阵内部结构变化决定的。显然, 这两个式子都依赖于具体的量值, 因此定量比较两种观测条件下(有源和无源)跟踪误差的变化是不实际的。但是, 仍然可以通过仿真比较两种条件下对机动参数(这里包括机动开始时间、转弯率和机动持续时间)的估计性能来解释估计误差 CRLB 有着不同变化的内在原因。

事实上, 由图 3~ 图 5 可以清楚地看到, 在两种不同的跟踪背景下, 由于观测量的不同, 导致对机动参数的估计精度和估计误差的收敛速度大不相同。在有源跟踪条件下, 对应的机动参数的估计精度相对较低, 且误差需要较长的时间才能达到稳定的状态。相比之下, 无源跟踪背景下的机动参数估计精度要高出一个数量级, 且在较短的时间内就达到了稳定跟踪, 这正是图 2 中机动前后的距离和速度误差估计 CRLB 没有明显变化的本质原因。与前面的结果相同, 机动参数的估计精度也随着观测间隔的减小而提高。

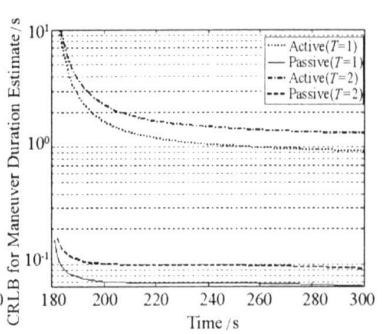
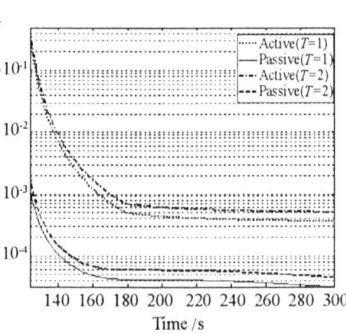
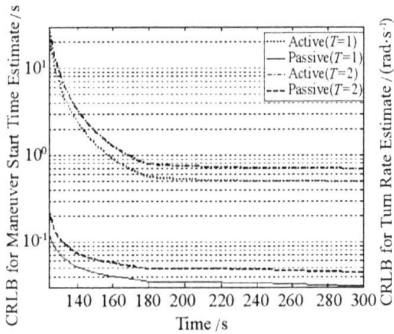


图 3 机动开始时间估计误差 CRLB

图 4 转弯率估计误差 CRLB

图 5 机动持续时间估计误差 CRLB

Fig. 3 CRLB of maneuver start time estimate

Fig. 4 CRLB of turning rate estimate

Fig. 5 CRLB of maneuver duration estimate

图 3~ 图 5 的结果说明, 目标机动阶段的距离估计精度有无明显变化主要取决于机动参数的估计性能, 很明显, 影响这一性能的根本因素是式(11)中 FIM 的信息变化。在有源目标跟踪中, 由于能测得目标的距离, 从而通过方位角得到目标的位置, 故不存在可观测性问题。与此不同的是, 无源目标跟踪通常都要受可观测性条件的影响, 可观测性越强, 就越有利于跟踪性能的提高, 反之亦然。为更好地说明这一问题, 图 6、图 7 示出了方位角和多普勒频率的变化曲线。

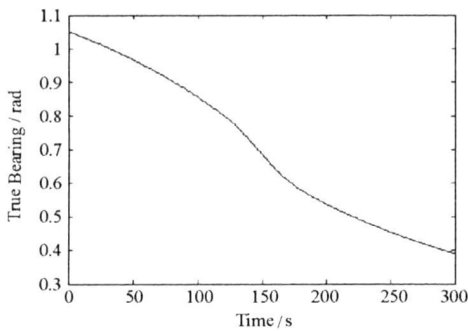


图 6 目标方位角变化

Fig. 6 Change of bearing

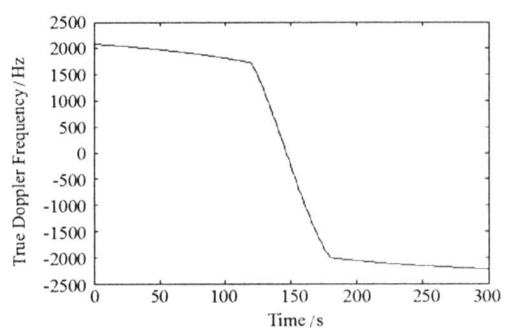


图 7 多普勒频率变化

Fig. 7 Change of Doppler frequency

由图的结果可以看出, 无论是方位角还是多普勒频率, 在无机动时的变化都较为缓慢, 即测量参数的变化率较小, 而在目标机动阶段(图中 121~ 180s), 测量参数出现了明显的变化, 特别是多普勒频率更是如此(即曲线的斜率明显增大)。这就说明, 目标的机动实际上对增强可观测性条件是有利的。因此, 在无源跟踪条件下, 机动参数的估计性能比有源跟踪要好, 使得目标的距离估计精度在机动前后无明显的性能恶化。

5 结束语

本文用目标的初始状态量和机动参数构成充分统计量,将机动目标跟踪误差的 CRLB 求解问题转化为变维参数矢量 CRLB 的计算问题,并通过矩阵理论分析了目标机动对 CRLB 变化所带来的影响,从而为机动目标跟踪算法的性能评估提供了基本的理论依据。对转弯机动的仿真结果表明,有源跟踪条件下的距离估计 CRLB 在机动前后会有明显的变化,导致跟踪性能下降。受可观测性条件的影响,在无源跟踪条件下,由于机动参数的估计精度较高,目标在机动阶段距离和速度估计的 CRLB 未见明显的突变。此外,提高测量数据率也有助于参数估计精度的提高。文中的分析方法同样适合于三维空间中的机动目标跟踪情况。

参考文献:

- [1] Chen Y T, Hu A G C, Plant J B. A Kalman Filter Based Tracking Scheme with Input Estimation [J]. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 1979, 15 (3): 237- 244.
- [2] Bar-Shalom Y, Bimival K. Variable Dimension Filter for Maneuvering Target Tracking [J]. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 1982, 18 (5): 621- 629.
- [3] 周宏仁, 敬忠良, 王培德. 机动目标跟踪[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.
- [4] Mazor E, Averbuch A Y, Bar-Shalom Y, et al. Interacting Multiple Model Methods in Target Tracking: A Survey [J]. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 1998, 34 (1): 103- 123.
- [5] Ristic B, Arulampalam S. Tracking a Manoeuvring Target Using Angle-only Measurements: Algorithms and Performance [J]. Signal Processing, 2003, 83(6):1223- 1238.
- [6] Duh F B, Lin C T. Tracking a Maneuvering Target Using Neural Fuzzy Network [J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cyberm. B, 2004, 34 (1): 16- 33.
- [7] Li X R, Jilkov P. Survey of Maneuvering Target Tracking—Part I : Dynamic Models [J]. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 2003, 39(4): 1333- 1364.
- [8] Becker. A General Approach to TMA Observability from Angle and Frequency Measurements [J]. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 1996, 32 (1): 487- 494.
- [9] Key S M. 统计信号处理基础[M]. 罗鹏飞, 译. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [10] 占荣辉, 王玲, 万建伟. 基于方位角和多普勒的机动目标无源定位跟踪可观测条件[J]. 国防科技大学学报, 2007, 29(1):54- 58.

(上接第 88 页)

4 结论

文中提出了一种采用快速搜索检测和细节分析检测相结合的检测方法来解决循环平稳信号检测中高复杂度、大运算量和大数据存储等难题的 TSAE-Z 算法。该算法快速简单、稳定可靠,在信噪比不太低的情况下不仅能够得到良好的估计,还可以通过灵活地改变分段长度和步进等参数来适应不同的循环平稳信号检测性能的需求。

参考文献:

- [1] Gardner W A. Signal Interception: A Unifying Theoretical Framework for Feature Detection [J]. IEEE Trans. Communication, 1988, 36(8): 897- 906.
- [2] Yeung G Y, Gardner W A. Search-efficient Methods of Detection of Cyclostationary Signals [J]. IEEE, Trans. Signal Processing, 1996, 44(5): 1214- 1223.
- [3] Gardner W A. Spectral Correlation of Modulated Signals: Part I —Analog Modulation[J]. IEEE Trans. Communication, 1987, 35(6): 584- 594.
- [4] Hoyer E A, Stork R F. The Zoom FFT Using Complex Modulation[C]// IEEE Proceedings of ICASP, 1977: 837- 841.
- [5] 黄春琳, 姜文利, 等. 低截获雷达信号的循环谱相关函数检测方法分析[J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(4):102- 106.