

文章编号: 1001-2486(2007)06-0026-04

## 基于相位恢复技术的二维相位解包络算法\*

胡晓军, 郑子文, 戴一帆, 李圣怡

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**介绍一种新型的二维相位解包络算法。该算法的原理是将被解包络的相位作为输入光场,通过光学衍射计算得到其远场衍射光场的光强分布,然后使用相位恢复算法进行优化计算,得到一组用于表达连续波面的最佳 Zernike 多项式参数。此算法的特点在于,结合已成熟的相位恢复算法,波面解包络的唯一性和准确性可得到充分的保证;同时利用光场衍射计算,可方便地通过对衍射光强的滤波实现对相位噪声的抑制。实验验证了该算法的有效性。

**关键词:**二维相位解包络;相位恢复;Zernike 多项式;衍射计算

**中图分类号:**TB57 **文献标识码:**A

## Two Dimensional Phase Unwrapping Algorithm Based on Phase Retrieval

HU Xiao-jun, ZHENG Zi-wen, DAI Yi-fan, LI Sheng-yi

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A novel two-dimensional phase unwrapping method is proposed. In this idea, the phase wrapped is propagated through an optical diffraction calculation as an input optical field and transformed into the intensity distribution. Then the phase retrieval algorithm is engaged in order to find the best fitting Zernike polynomials for the unwrapped phase based on the diffraction intensity. Because of the maturity of phase retrieval theory, the uniqueness and accuracy of phase unwrapping can be guaranteed. As a result, the phase noise can be remarkably reduced by intensity filtering. The validity of this algorithm is verified by experiment.

**Key words:** two-dimensional phase unwrapping; phase retrieval; Zernike polynomial; diffraction calculation

在现有的光学相位测量技术中,得到的相位值大都仅是相位的主值,也就是被包络的相位图,其值域为  $(-\pi, \pi]$ ,以条纹图的形式出现,没有形成直观连续波面,无法用于后续的分析和使用。将这种包络的相位图展开并连续化的过程称为相位解包络,如图 1 所示。

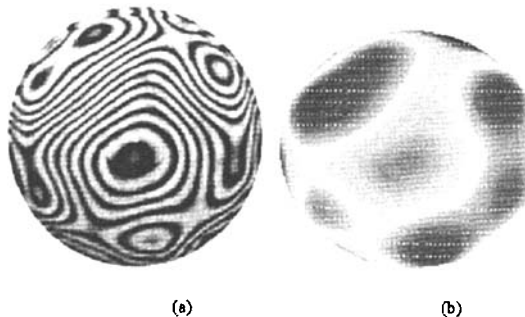


图 1 解包络前后的二维相位图

Fig. 1 Wrapped and unwrapped two dimensional phase maps

相位解包络,特别是二维相位解包络方法的研究由来已久,由于其重要性和实用性,新方法不断出

\* 收稿日期:2007-05-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50775217)

作者简介:胡晓军(1978—),男,博士生。

现,种类很多<sup>[1]</sup>。但现有方法的思路都是对相位的主值图在相位空间进行各种直接的规则判断和数值分析及算法处理。这种思路遇到的主要问题是:局部相位信息的干扰将影响全局相位解包络的唯一性和准确性;算法大多对相位噪声很敏感,有时造成严重的计算失真。

本文介绍一种基于相位恢复技术的二维相位解包络算法。其思路特点在于不直接从相位的空间域进行分析,而是将被包络的相位波面看作一个在空间中传波的光场。经过对相位的调制和通过空间衍射,可得到多个不同的衍射的场强分布图。根据强度分布图包含的信息,启用一个优化搜索算法可得到被解包络相位数据的最佳 *Zernike* 多项式拟合,进而获得连续的相位图。这一过程可用现有的相位恢复算法实现,解包络的唯一性和准确性可得到充分的保证。该思路原理可由图 2 说明。

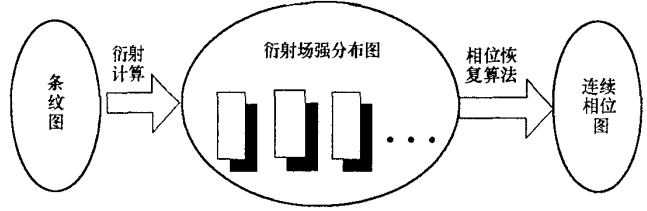


图 2 相位恢复解包络算法原理

Fig. 2 Phase unwrapping algorithm based on phase retrieval

## 1 相位恢复解包络算法原理

### 1.1 算法原理

相位恢复技术是根据观测面的光场的强度反推入射面光场相位的方法<sup>[2]</sup>。相位恢复技术利用光场的衍射模型,对假设的输入光场进行衍射计算,得到输出面光场的强度分布。将计算得到的输出面光场的强度与真实相位产生的场强数据相比较,以两者误差最小为准则,通过迭代或搜索找到最符合真实场强数据的相位分布,此相位即为测量的结果。

在本文中,我们将被包络的相位  $\varphi(x, y)$  视为被观测波面,表示为:

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp[i\varphi(x, y)], & x, y \in D \\ 0, & x, y \notin D \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $D$  为相位图有效区域,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $x, y$  为二维坐标。应用夫朗和费衍射积分模型,将  $f(x, y)$  进行远场衍射,得到远场衍射光场。这一过程可等效为一个傅立叶变换,表示为:

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (2)$$

其中,  $u, v$  为远场衍射光场二维平面的等效坐标。光强度分布可表示为:

$$I(u, v) = |F(u, v)|^2 \quad (3)$$

为了能从  $I(u, v)$  中充分获取  $f(x, y)$  的信息,通常对  $f(x, y)$  进行调制,以获得更多的场强信号。简单的做法是使用离焦量  $\varphi_d$  作为相位调制函数,将  $\varphi_d$  代入式(2),这时场强可表示为:

$$I(u, v) = \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(i\varphi_d) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \right|^2 \quad (4)$$

其中,  $\varphi_d = k(x^2 + y^2)$ ,  $k \in \mathbf{R}$ , 为离焦系数。调整离焦系数  $k$  可以获得多幅场强图。如果将未加调制的情况视为  $k = 0$ , 则场强数据可是看作一系列离焦的场强图, 设每张场强图记做  $I_j$ , 相应的离焦系数为  $k_j$ , 将  $\varphi_d = k_j(x^2 + y^2)$  带入式(4)得到:

$$I_j(u, v) = \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[ik_j(x^2 + y^2)] \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \right|^2 \quad (5)$$

式(5)在数值计算中可采用 FFT 算法计算, 得出的场强数据可作为相位解包络计算的参考强度数据。

为了得到连续的二维相位面形, 这里选用 *Zernike* 多项式表示相位面形(也可以选用其他形式的多项式), 这时连续的面形可表示为:

$$\theta(x, y) = \sum_{m=1}^M a_m Z_m(x, y) \quad (6)$$

其中,  $a_m$  为多项式系数,  $M$  为参数个数。这样用  $\theta(x, y)$  替代  $\varphi(x, y)$ , 带入式(5), 可得到另一组场强图, 可由式(7)计算:

$$\hat{I}_j(u, v) = \left| \iint_b \exp[i\theta(x, y)] \exp[ik_j(x^2 + y^2)] \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \right|^2 \quad (7)$$

我们希望用  $\theta(x, y)$  计算出的场强能与用  $\varphi(x, y)$  计算出的场强一致, 可用以下目标函数表达:

$$E = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^L [\hat{I}_j(n) - I_j(u, v)]^2 \quad (8)$$

其中,  $n$  表示对场强的抽样点序号,  $L$  为每张强度图的抽样点个数,  $N$  为强度图的个数。

这样相位解包络的问题转化为一个非线性优化问题, 也就是要找到一组参数向量  $a \equiv [a_1, \dots, a_m, \dots, a_M]$ , 使得式(8)取最小值。

这一优化问题已经在现有的相位恢复算法理论中得到了很好的解决<sup>[3]</sup>。较常用的优化方法有梯度下降法和遗传算法。梯度下降法是根据导数  $\partial E / \partial a_m$  确定目标函数的下降方向, 一步步地搜索, 逼近最优参数。但梯度下降法容易陷入局部最优点, 特别是当 Zernike 多项式的阶数较多时, 这种情况尤为严重, 因而这种方法适合参数较少的波面拟合。当 Zernike 多项式的阶数较多时, 使用遗传算法比较有效。遗传算法模拟生物种群的进化过程, 其优点在于比较容易发现全局最优解。可以将向量  $a$  看作一个生物个体, 随机生成一群向量  $a$ , 经过选择、交叉和变异一代代地搜索最优解。由于以上算法已经成熟, 这里不再赘述。

## 1.2 计算结果的唯一性

计算结果的唯一性, 是指在不考虑噪声的情况下, 设  $a_0$  为真实的相位形面参数, 当  $E \rightarrow 0$  时, 一定有  $a \rightarrow a_0$ 。显然, 对于相位解包络算法而言, 结果的唯一性是很重要的, 它决定了算法的成败。从理论上讲, 引入两幅离焦衍射光强图即可恢复出相位<sup>[4]</sup>。

但考虑算法的效率, 总希望当  $E \rightarrow \delta$  ( $\delta > 0$ ) 时  $\|a - a_0\| \rightarrow \epsilon$ , 其中  $\epsilon$  是一个较为理想的误差值。因此算法结果的唯一性除了要求优化算法能够找到最佳的相位拟合参数外, 更重要的是相位调制函数及其参数是否选择合理, 是否有利于从场强数据中恢复出相位形面。关于调制函数的设计问题, 前人已经做了相关研究<sup>[5]</sup>。但从实际使用的观点看, 当现有光场图提供的约束信息不足时, 可考虑适当增加约束, 即引入更多的离焦场强图片, 这类似于参考文献[6]中的做法。适当地增加场强图片有利于选取较好的离焦参数, 但数据量太大会影响运算的效率, 因而我们引入一种自检的机制, 以求在有限的运算量内保证结果达到理想的误差要求。

具体来说就是在初始计算时选用两张强度图代入优化搜索算法。当算法收敛后, 使用未解包络的相位数据  $\varphi(x, y)$  和计算出的连续相位  $\theta(x, y)$  在同样条件下分别产生第三张强度图作为检验数据, 看  $\theta(x, y)$  是否满足以下两点: (1) 使用  $\theta(x, y)$  和  $\varphi(x, y)$  分别产生的检验是否数据一致; (2)  $\theta(x, y)$  的主值图是否与  $\varphi(x, y)$  一致。如果  $\theta(x, y)$  同时不满足条件(1)和(2), 则将第三张强度图也代入优化搜索算法, 重新计算  $\theta(x, y)$ ; 如果不满足条件(2)但满足条件(1), 则需另外寻找一张强度图, 使  $\theta(x, y)$  不满足条件(1), 之后将第三张强度图也代入优化搜索算法, 重新计算  $\theta(x, y)$ , 直到  $\theta(x, y)$  同时满足条件(1)和(2)时, 可以认为  $\theta(x, y)$  是  $\varphi(x, y)$  解包络的最佳解。

## 1.3 算法对噪声的抑制

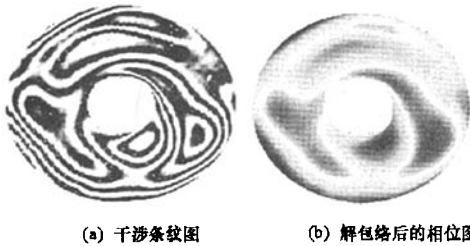
由于相位的噪声在其远场衍射面(也就是傅立叶频谱平面)上形成随机分布的能量散射, 这就给噪声的抑制提供了条件。可以在频谱面上用对场强数据通过低通滤波的方法实现对散射噪声的去除。滤波处理可表达如下:

$$I'_j(u, v) = I_j(u, v) \otimes h(u, v) \quad (9)$$

其中,  $h(u, v)$  为低通滤波器,  $\otimes$  表示卷积。用  $I'_j(u, v)$  替换式(8)中的  $I_j(u, v)$  进行相位形面参数的优化计算, 即可达到抑制相位噪声的效果。

## 2 实验结果

我们用干涉仪实际测得的条纹图作为相位解包络算法的对象,如图 3(a)所示,条纹图由  $512 \times 512$  的灰度数据组成。我们采用远场衍射并使用离焦生成两幅强度数据,离焦系数为  $k = \pm 1.5$ ,如图 4 所示。使用遗传算法计算 Zernike 多项式的前 36 阶参数,产生连续的相位面形,如图 3(b)所示。通过对计算结果的检验,发现其与原条纹数据符合较好并与其他解相算法的结果一致。



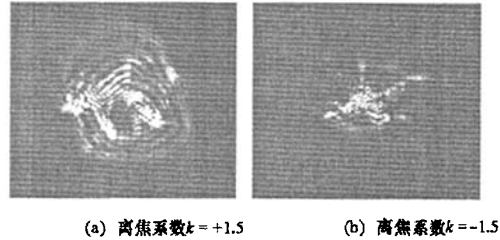
(a) 干涉条纹图 (b) 解包络后的相位图

图 3 干涉仪实际测得的条纹图及其解包络结果  
Fig.3 Figure map from interferometer and its unwrapped phase map

为了检验算法的抗噪声能力,我们在图 3 中人为地加入噪声,如图 5 所示。

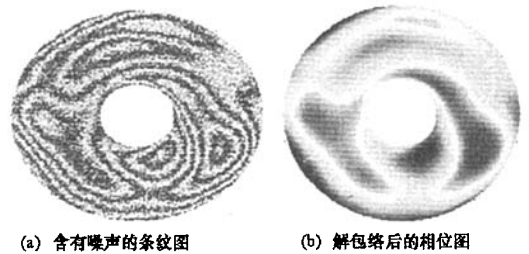
用图 5(a)中的相位数据产生远场衍射的光强分布,并用二维高斯型低通滤波器对含有噪声的场强数据进行滤波,如图 6 所示。

由图 6(a)和(b)可明显观察到相位噪声引起的散射效应。滤波后的图 6(c)和(d)与图 4 相比较,说明适当选取滤波器能够保证在数据不失真的情况下有效地抑制噪声。用图 6(c)、(d)作为场强数据,代入相位恢复算法,得到去噪声的解相位结果,如图 5(b)所示。与图 3(b)比较一致性可说明算法对噪声抑制的效果。



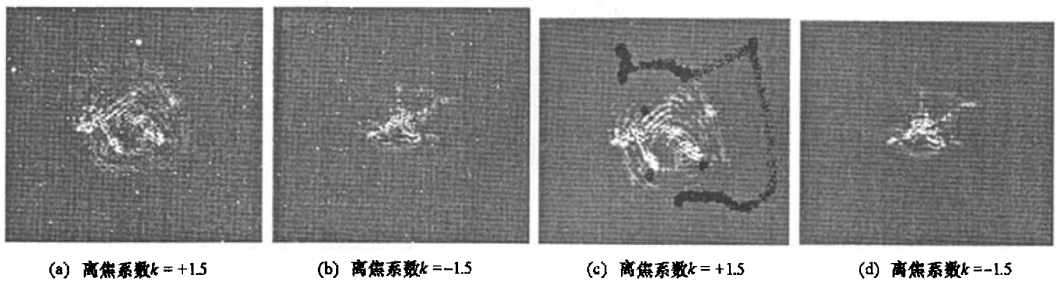
(a) 离焦系数  $k = +1.5$  (b) 离焦系数  $k = -1.5$

图 4 不同离焦系数下的衍射光场强度图  
Fig.4 Diffraction intensity pictures with different defocus coefficients



(a) 含有噪声的条纹图 (b) 解包络后的相位图

图 5 含有噪声的条纹图及其解包络结果  
Fig.5 Figure map with noise and its unwrapped phase map



(a) 离焦系数  $k = +1.5$  (b) 离焦系数  $k = -1.5$  (c) 离焦系数  $k = +1.5$  (d) 离焦系数  $k = -1.5$

图 6 含噪声相位数据的远场衍射图及滤波处理后的数据

Fig.6 Diffraction intensity pictures from noisy phase and corresponding pictures after filter processing

## 参考文献:

- [1] Baldi A, Dertolino F, Ginesv F. On the Performance of Some Unwrapping Algorithms[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2002, 37(4): 313 - 330.
- [2] Gerchberg R W, Saxton W O. A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures[J]. Optik., 1972, 35(2): 237 - 246.
- [3] Fienup J R. Phase Retrieval Algorithms: A Comparison[J]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758 - 2769.
- [4] Devaney A J, Childlaw R. On the Uniqueness Question in the Problem of Phase Retrieval from Intensity Measurement [J]. Opt. Soc. Am. A, 1978, 68(10): 1352 - 1354.
- [5] Dean B H, Bowers C, Charles W. Diversity Selection for Phase Diverse Phase Retrieval [J]. Opt. Soc. Am. A, 2003, 20(8): 1490 - 1504.
- [6] Ohara C M, Faust J A. Phase Retrieval Camera Optical Testing of the Advanced Mirror System Demonstrator[C]//SPIE, 2004, 5487: 954 - 962.

