

文章编号:1001-2486(2007)06-0093-05

基于演化网络的体系对抗效能模型*

谭东风

(国防科技大学 信息系统与管理学院,湖南长沙 410073)

摘要:在对 Lanchester 假设的扩展和网络化基础上,构造了体系对抗战场的图论表示 $F_{R,B}$ = 红军网络 $I_R \cup$ 蓝军网络 $I_B \cup$ 交战空间 $f_{R,B}$, 利用生成 $f_{R,B}$ 的随机子网和对参战网络“去点”的方法,提出一种统一表示体系对抗中交战行为与网络行为的模型新范例——体系对抗演化网络模型,模型中网络部队作战效能不但依赖兵力规模和武器性能,而且受网络结构及其战场环境的影响。试验对比了拥有同等作战资源网络体系的作战效能,得到在一个对抗系统中无标度网络对随机网络的胜率高但并非总赢的结论,初步分析了在对抗系统中无标度网有效、鲁棒但脆弱的原因。

关键词:体系对抗;战争建模;复杂网络;Lanchester 模型;效能;抗毁性

中图分类号:E072 **文献标识码:**A

An Evolving Network Model for Effectiveness of
Combat between SoSs

TAN Dong-feng

(College of Information System and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A novel model is put forward which represents combat behavior and network behavior in an unitary form, the evolving network for the combat on the battlefield $F_{R,B}$ is constructed jointly by generating a random network on $f_{R,B}$ and removing nodes from fighting forces' networks, under the condition that the assumptions of Lanchester Model is generalized, and represented as a triple of networks $F_{R,B}$ = forces R 's network $I_R \cup$ forces B 's network $I_B \cup$ engagement space $f_{R,B}$. In the model the effectiveness of a networked forces relates not only its size and the weapon performance, but also the structure of network and the battlefield in which it operates. An experiment shows that with the same operational assets a scale-free network is more dominant than a random network for both information effectiveness and killing rate but not always wins, the origin is analyzed that the scale-free network is efficiency, robust yet fragile in the conflict system.

Key words: system of systems (SoS); combat modeling; complex network; Lanchester's model; effectiveness; vulnerability

战争具有时代性,战争建模亦然。19世纪, Von Clausewitz 用“迷雾”、“重心”、“摩擦”等概念描述战争特性^[1]。20世纪初, Lanchester 前卫地采用微分方程描述了初见端倪的空战,并以著名的“线性律”和“平方律”^[2]定量论证了冷兵器战争和热兵器战争的差异。20世纪中期, Dupuy 通过对战史数据的系统分析,提出了各类武器统一的效能指数^[3]。近期,基于战争是复杂适应系统(CAS)^[4]的思想产生了多主体系统(MAS)战争模型^[5]。随着现代社会、战争对信息和网络的广泛利用和日益依赖,以“网络为中心”将是信息时代的主要社会形态^[6]和作战样式^[7]的观点被提出来。21世纪初, Albert, Jeong, Barabási 利用复杂网络理论^[6]对不同网络结构承受故障和攻击能力的开创性研究^[8]引起了相关领域广泛的研究热情,目前众多研究都主要围绕单方网络的攻防行为和特性^[9],以体系对抗的观点研究冲突网络战争行为的建模理论尚不多见^[10-12]。

传统上以兵力规模和火力强度衡量战斗力的观念面临挑战,以体系对抗为特征的新战争观应运而生,然而反映现代战争新特征的模型研究远落后于战争实践。通过对战斗微观过程的分析,我们认为, Lanchester 假设中蕴含的信息机制尚未充分发掘^[13],而在信息化条件下,“通视”和“直瞄”等将以新的形

* 收稿日期:2007-04-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70571084);国家部委资助项目(513040404-1)

作者简介:谭东风(1958-),男,教授。

式重现^[14]。因此,结合传统方法与现代理论思考现代战争建模问题值得探索。

有别于传统的基于“集合”交战的 Lanchester 模型范例(图 1),我们通过对 Lanchester 假设的符号化,采用一致的网络模型将“外部的”交战行为与“内部的”网络行为统一起来,提出了一种基于“图”交战的体系对抗模型范例(图 2)。在这个吸取传统平均域方法^[2]与现代多主体建模技术^[5]内涵和优长的新范例中,体系对抗的效能指标既包括兵力规模和火力强度,也包括动态战场因素和网络结构性性质,如基于网络体系结构的整体信息效能。

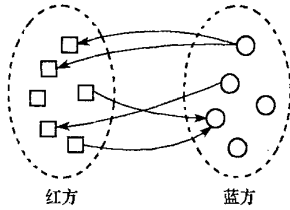


图 1 Lanchester 交战的图论表示
Fig.1 The graph of Lanchester combat

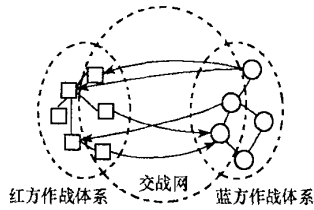


图 2 体系对抗的图论表示
Fig.2 The graph of combat between SoSs

1 Lanchester 假设的扩展与符号化

为了定量描述战斗毁伤变化,Lanchester 提出了一个微分方程组^[2]

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\alpha B(t), \quad R(0) = R_0, \quad \frac{dB(t)}{dt} = -\beta R(t), \quad B(0) = B_0 \quad (1)$$

该模型基于的 Lanchester 基本假设是 (b-1) 对抗双方均由一定数量同质的和自主的“量子化”单元构成,并可近似地用连续变量表示;(b-2) 单元是独立的作战单位,可以自主地观察、攻击并判定攻击效果;(b-3) 战场是“透明”的,每一单元知道其他单元的状态,如身份、位置和行为能力等;(b-4) 战场是“直达”的,每一单元均能被对方任一单元直接发现、攻击和杀伤;(b-5) 不考虑己方之间的协同、误伤、额外的兵力增减、具体的地域特征以及其他非量化因素,如士气等^[15-16]。

Lanchester 基本假设是对视距空间战斗的抽象,随着作战范围的扩大,分布在广袤战场上的参战单元将 (n-1) 借助各种通信设施组成的网络(通信链路往往是“稀疏的”)进行彼此联系;(n-2) 通过链式联系获得战场信息/资源,由于网络中联系不再是“直达”的,因此信息/资源传递的时效性不可忽视;(n-3) 利用信息传输和共享,若干直接的局部感知可合成一个间接的战场全局感知;(n-4) 时刻处于动态变化的战场态势中。综合上述因素的 Lanchester 基本假设称为 Lanchester 网络假设。

采用图论语言描述上述 Lanchester 网络假设及其战斗演化:每个战斗单元用一个节点表示,参战方分别用单元集合 R, B 表示, $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, 单元之间存在或可能的通信、观察或射击关系用连接相应节点之间的有向边表示,如 r_i 与 r_j 通信表示为 (r_i, r_j) , $(r_j, r_i) \in R \times \text{link} R$, r_i 射击并杀伤 b_j 表示为 $(r_i, b_j) \in R \times \text{sho} B$ 。

定义 1 网络部队 $F_{\mathcal{N}}$ 由火力单元(点)、链路(边)两类作战资源及其关系构成加权无向图

$$F_{\mathcal{N}} = G(\mathcal{N}, f_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]; I_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N} \times \text{link} \mathcal{N}, l_{\mathcal{N}}: I_{\mathcal{N}} \rightarrow R^+) \quad (2)$$

其中, \mathcal{N} 是有限单元集, $f_{\mathcal{N}}$ 表示每个单元的命中概率, $I_{\mathcal{N}}$ 是 \mathcal{N} 的节点之间的通信链路集合, $l_{\mathcal{N}}$ 表示每条链路的通信延时 (> 0)。

定义 2 $F_{R(t)}, F_{B(t)}$ 之间 t 时刻可能的观察、射击关系构成的交战空间 $f_{R(t), B(t)}$ 是二重有向二部图

$$f_{R(t), B(t)} = S_{R(t)} \cup S_{B(t)} \quad (3)$$

$$S_{R(t)} \subseteq R(t) \times \text{sense} B(t) \cup R(t) \times \text{sho-able} B(t), \quad S_{B(t)} \subseteq B(t) \times \text{sense} R(t) \cup B(t) \times \text{sho-able} R(t) \quad (4)$$

其中, $S_{R(t)}, S_{B(t)}$ 的节点与边的时变表示由于单元机动等原因引起的单元感知域和攻击域变化。

定义 3 网络部队的战场空间 $F_{R(t), B(t)}$ 是 t 时刻各单元之间可能的信息关系和攻击关系集合

$$F_{R(t), B(t)} = I_{R(t)} \cup I_{B(t)} \cup f_{R(t), B(t)} \quad (5)$$

在视距空间中,各单元之间的彼此通视形成自然的“通信”联系,同时所有单元都可以相互攻击,因此, Lanchester 基本假设可以简单地用一个完全连通图和一个完全二部图表示

$$\text{Lanchester-} F_{R, B} = I_R \cup I_B \cup f_{R, B} = [(R \cup B) \times \text{sense} (R \cup B)] \cup [B \times \text{sho-able} R \cup R \times \text{sho-able} B] \quad (6)$$

在 Lanchester 基本假设中同方单元之间的联系与协同不成问题,故只需考虑对抗双方的交战关系

(图1)^①。在现代战争中,直达的“通视”不复存在,作战单元之间必须借助沟通和协作才能作战,因此研究体系对抗行为和效能必须考察三个网络之间的关系(图2)。

2 基于网络的体系对抗演化模型

网络部队整体效能与其兵力规模和敏捷性相关,而敏捷性与网络的整体信息传输效率相关。我们首先定义网络整体信息和组织效能两个特征量 IE 和 OE ,然后提出一个把随机交战网络生成^[11](算法1)与 Albert“去点”操作^[8]结合的网络体系对抗的演化网络模型(算法2)。

2.1 网络的效能度量

定义4 令网络部队 $F_{\mathcal{N}}$ 的整体信息效能

$$IE(F_{\mathcal{N}}) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i \neq j \in F_{\mathcal{N}}} \epsilon_{ij} \quad (7)$$

其中, N 是 $F_{\mathcal{N}}$ 的节点个数 $|F_{\mathcal{N}}|$, $\epsilon_{ij} = 1/d_{ij}$, d_{ij} 是从节点 n_i 到节点 n_j 的最短路径长度(总的通信延时),若不存在路径,则令 $d_{ij} = +\infty$ 。 $IE(F_{\mathcal{N}})$ 是网络 $F_{\mathcal{N}}$ 的平均通信速率^[17],我们将 $IE(F_{\mathcal{N}})$ 作为网络 $F_{\mathcal{N}}$ 敏捷性的度量。

当 $l_{ij} \equiv 1$ 时,若 $F_{\mathcal{N}}$ 是全连通图, $IE(F_{\mathcal{N}}) = 1$; 当 $F_{\mathcal{N}}$ 是星型连通图时, $IE(F_{\mathcal{N}}) = 1/2 + 1/N \approx 1/2$ 。^②

定义5 令网络部队 $F_{\mathcal{N}}$ 的整体组织效能

$$OE(F_{\mathcal{N}}) = |F_{\mathcal{N}}| \cdot IE(F_{\mathcal{N}}) = \frac{2}{(N-1)} \sum_{i \neq j \in F_{\mathcal{N}}} \epsilon_{ij} \quad (8)$$

当 $F_{\mathcal{N}}$ 是全连通图时, $OE(F_{\mathcal{N}}) = |F_{\mathcal{N}}| IE(F_{\mathcal{N}}) = |F_{\mathcal{N}}| = |\mathcal{N}|$, 即 Lanchester 基本假设中的兵力规模。

2.2 网络之间随机格斗生成

定义6 i 时刻在交战空间 $f_{R(i), B(i)}$ 中 $F_{R(i)}$ 与 $F_{B(i)}$ 之间的随机格斗是 $f_{R(i), B(i)}$ 的随机子网^[18]

$$f_{R(i), B(i)}: \text{duel} = R(i)_{\text{shot}} \cup B(i)_{\text{shot}} \subseteq S_{R(i)} \cup S_{B(i)} = f_{R(i), B(i)} \quad (9)$$

其中, $R(i)_{\text{shot}} \subseteq R(i) \times \text{shooting} B(i)$, $B(i)_{\text{shot}} \subseteq B(i) \times \text{shooting} R(i)$ 分别表示 $F_{R(i)}$ 、 $F_{B(i)}$ 实际的相互杀伤。

算法1 $F_{R(i)}$ 、 $F_{B(i)}$ 之间的随机格斗 $f_{R(i), B(i)}: \text{duel}$ 是一个扩展的随机交战网络模型^[11], 首先, 以概率

$$OE(R(i)) / [OE[R(i)] + OE[B(i)]] \quad (10)$$

从 $S_{R(i)}$ (否则从 $S_{B(i)}$) 中起始点不重复地随机取边 $r_{\text{shooting}} \in R(i) \times \text{shooting} B(i)$, 重复上述过程 k_i 次, 分别获得边集 $R_{\text{shooting}}^{(i)}$ 和 $B_{\text{shooting}}^{(i)}$; 然后, 将每条边 $r_{\text{shooting}} \in R_{\text{shooting}}^{(i)}$ 以概率 $f_R(\text{shooter}(r_{\text{shooting}}))$ 添加到 $R(i)_{\text{shot}}$ 中, 对 $B_{\text{shooting}}^{(i)}$ 也作类似操作, 其中 $\text{shooter}((r, b)) = r$, 随机数 $0 \leq k_i \leq OE[R(i)] + OE[B(i)]$ 表示交战强度(单位时间射击总数), $k_i / [R(i) + B(i)]$ 表示交战密度。显然, $f_{R(i), B(i)}: \text{duel} = R(i)_{\text{shot}} \cup B(i)_{\text{shot}}$ 是 $f_{R(i), B(i)}$ 的一个随机子图^[18]。

2.3 网络之间的战斗演化

算法2 网络化战场 $F_{R(i), B(i)}$ 上的 i 阶战斗 $F_{R(i), B(i)}: \text{Combat}$ 是三元组序列

$$F_{R(i), B(i)}: \text{Combat} = \langle F_{R(i)}, F_{B(i)}, EN_{R(i), B(i)} \rangle, \quad i = 0, 1, \dots \quad (11)$$

其中, i 表示格斗“回合”数, 网络部队 $F_{R(i)}$ 、 $F_{B(i)}$ 及其交战网络 $EN_{R(i), B(i)}$ 的初值分别是

$$R(0) = R, \quad I_{R(0)} = I_R; \quad B(0) = B, \quad I_{B(0)} = I_B; \quad EN_{R(0), B(0)} = \emptyset \quad (12)$$

若 $f_{R(i), B(i)}: \text{duel} = R(i)_{\text{shot}} \cup B(i)_{\text{shot}}$, $\text{target}(S) = \{y | (x, y) \in S\}$,

$$R(i+1) = R(i) - \text{target}(B(i)_{\text{shot}}), \quad B(i+1) = B(i) - \text{target}(R(i)_{\text{shot}}) \quad (13)$$

$$I_{R(i+1)} = I_{R(i)} \cap [R(i+1) \times R(i+1)], \quad I_{B(i+1)} = I_{B(i)} \cap [B(i+1) \times B(i+1)] \quad (14)$$

$$EN_{R(i+1), B(i+1)} = EN_{R(i), B(i)} \cup f_{R(i), B(i)}: \text{duel} = EN_{R(i), B(i)} \cup R(i)_{\text{shot}} \cup B(i)_{\text{shot}} \quad (15)$$

① 文献[11]研究了 Lanchester 随机交战网络的拓朴性质, 其节点的出度分布服从指数幂律。

② 当 N 足够大时, 星型连通图以占全连通图 $2/N$ 的边数, 达到全连通图整体传输速率的一半, 但其连通性和效率是十分脆弱的(如当中心节点失效时)。

③ 在 Lanchester 网络假设中增加假设: $(n-5)$ 各方没有不成为攻击目标的单元。

其中,式(13)从部队网络中去除受到对方攻击的节点(如 $target(B(i)_{shot})$);式(14)去除与该节点相关的所有边,即节点受损使关联链路失效的“内杀伤”效应。

显然, $F_{R(i)}, F_{B(i)}$ 是(节点与边)“单减”的, $EN_{R(i), B(i)}$ 是(边)“单增”的演化网络。

2.4 体系对抗的兵力毁伤

从演化网络观点,网络部队兵力毁伤是一个网络阶的递减过程

$$\begin{cases} < |R(i+1)| - |R(i)| > \propto -f_R IE(B(i)) |B(i)| = -f_R OE(B(i)), & R(0) = R \\ < |B(i+1)| - |B(i)| > \propto -f_B IE(R(i)) |R(i)| = -f_B OE(R(i)), & B(0) = B \end{cases} \quad (16)$$

上式是一种随机形式的 Lanchester“网络”方程^①,其中网络整体信息效能(如 $IE(B(i))$)是一个表示网络中单元整体作战效能发挥程度的非线性因子,其解析表达目前难以获得。在基于 Lanchester 基本假设的战斗中,由于 F_R, F_B 是全连通的“视视网”,其整体信息效能达到最大(当 $l_y \equiv 1$ 时, $IE(F_A) = 1$),这说明 Lanchester 交战是网络化体系对抗的一种“最优”特例。

3 无标度网络与随机网络的对抗

考虑红蓝双方拥有数量相同的作战资源,即兵力数量 $|R| = |B| = 100$,通信链路数量 $|I_R| = |I_B| \approx 200$,作战单元的命中概率相同 $f_R = f_B \equiv 0.1$,依文献[19]生成初始网络,红方为随机网络,联边概率^[18] $p = 0.04$,蓝方为 BA 无标度网络,联边参数^[20] $m_0 = 2, m = 2, t = 98$ 。在无标度网络作战体系 F_B 对随机网络作战体系 F_R 的 100 次对抗试验中,双方胜率分别是 87% 和 13%^②。总体而言,无标度网络具有结构优势,一方面,由于起始时无标度网络信息传输效率略高,因此其作战单元攻击几率也高些;另一方面,由于无标度网络的度分布特性,在遭受随机攻击时,其度高节点受到打击的几率很小,受损的大多是度低节点,从而具有较高的鲁棒性^[8]。图 3 反映两种战斗结局的兵力毁伤和信息效能衰减的平均值变化。

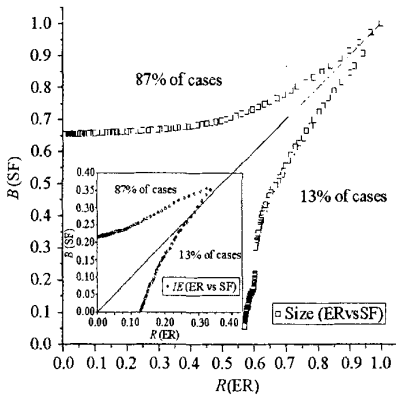


图 3 随机网 ER 与无标度网 SF 的兵力与信息效能毁伤对比
Fig.3 Size, IE of R(ER) vs. size, IE of B(SF) in Average

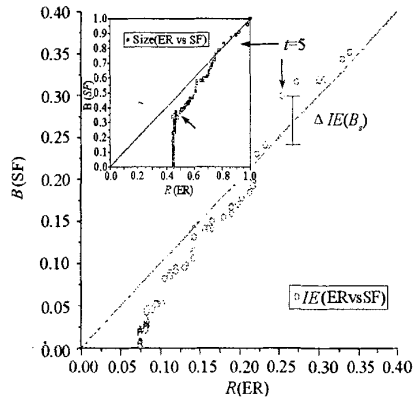


图 4 一个随机网 ER“战胜”无标度网 SF 试验样本
Fig.4 Sample of R(ER) wins over B(SF)

值得注意的是,无标度网络虽然总体占优但并非总赢,攻击效能处劣势的随机网络也有不可忽略的一成多获胜机遇。分析这些案例会发现一个共同规律,即在战斗的早期(不超过平均总交战回合数的 1/5),无标度网络的信息效能 IE 都有较大的衰减,而我们知道 IE 是由网络拓扑结构决定的平均信息传输效率的度量。图 4 是一个随机网络取胜的案例,其中在第 5 回合时, $\Delta IE(B_5) / IE(B_0) \approx 16\%$,表明其中有无标度网络“关键性”节点被随机地击中,由于这些节点及其关联边的“去除”,导致信息效能的大幅衰减,进而使其攻击效能降低,并丧失原有的攻击优势,直至最后被对方战胜 ($OE(F_B) \rightarrow 0^+$)^③。在图 4 反映双方兵力毁伤的(内嵌)相图中,当战斗进行到第 57 回合时(约总交战回合数的 1/3 时),红蓝兵力对比是 50% : 37% (图中箭头所指位置),虽然蓝方仍有约 37% 的兵力,但由于其作战体系整体效能丧

① 当 $k_i = OE(R(i)) + OE(B(i))$ 时。

② 在试验次数 $N = 50, 60, 70, 80, 90$ 时,偏差 $|(\sum Red\ wins) / N - 13\% |$ 分别是 0.05, 0.05, 0.04, 0.03, 0.03, 说明试验次数足够。

③ 这也许可以视为信息时代一种新的战斗胜负观,另文论述。

量研究单方网络受攻击和故障的工作得出无标度网络具有“鲁棒但脆弱”的结论相比^[8-9,21-22],本文提出并证实了在一个对抗体系中无标度网络相对具有“有效、鲁棒但脆弱”的特性。

虽然本文只讨论了随机去除节点策略下的网络对抗效能,但由于体系对抗试验的特点,战斗结局帮助我们“产生、筛选并发现”采用优先攻击关键节点策略的“战例”,其中蕴含的分析方法将另文介绍。

4 结论

通过发掘 Lanchester 假设中战场结构与信息机制,并结合现代战争特点进行图论化描述,提出了一种体系对抗演化网络,模型综合考虑了兵力数量、武器性能,特别是基于网络拓扑结构的信息效能对战斗毁伤的影响;实现了体系对抗中交战行为与网络行为的统一表示和操作;时变的交战空间网络可模拟战场中单元机动、战场感知等动态变化,这些特性在以 Lanchester 模型为代表的平均域分析中是难于表现和处理的;此外,显式和可视的模型形式使建模和验模的难度相对降低,因此,模型具有明显的方法和工具价值^[13]。作为模型的应用,把拥有同等网络作战资源的无标度网络与随机网络放到一个对抗体系中对比,研究对抗结局以及整体效能和兵力毁伤的变化,发现在对抗条件下无标度网络虽然总体占优但并非总赢,具有相对有效、鲁棒但脆弱的特性。从系统演化的观点来看,无标度结构是网络增长、优化的结果^[20],但在形成有效结构的同时也埋下了脆弱的 Achilles 踵^[8]。

本文的模型及其试验为体系对抗中体系的“崩溃”效应提供了一种思辨性描述^[14]以外的可证伪的展现方式。

致谢

王斌,张辉,张部林完成了模型的部分数字实验工作。

参考文献:

- [1] Von Clausewitz C. On War[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.
- [2] Lanchester F W. Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm[J]. Engineering, 1914, 98(also in Newman J R eds. the World of Mathematics [C]/Redmond: Microsoft Press, 1988(4):2113 - 2131).
- [3] 杜派 T N. 把握战争——军事历史与作战理论[M]. 北京:军事科学出版社,1991.
- [4] Holland J. Emergence-from Chaos to Order[M]. New York: Assison-wesley Publishing Company Inc., 1998.
- [5] Ilchinski A. Artificial War: MultiAgent-based Simulation of Combat[M]. Singapore: World Scientific Publishing Cop. Ltd., 2004.
- [6] Barabási A L. Linked: The New Science of Networks [M].Massachusetts: Perus Publishing, 2002.
- [7] Alberts D S, Garstka J J, Stein F P. Network Centric Warfare-developing and Leveraging Information Superiority [M]. 2nd Edition (Revised), Washington: CCRP Publication Series, 2001.
- [8] Albert R, Jeong H, Barabási A L. Attack and Error Tolerance of Complex Networks[J]. Nature,2000,406:378 - 382.
- [9] 谭跃进,吴俊,邓宏钟,等. 网络抗毁性综述[J].系统工程,2006,24(10):1 - 4.
- [10] Cares J R. An Information Age Combat Model[C]//Copenhagen, Denmark:9th ICCRTS, September 15th, 2004.
- [11] 谭东风. 一种基于随机映射的战斗效能模型[J].国防科技大学学报,2006,28(6):102 - 107. ①
- [12] 王斌,谭东风,凌云翔. 基于复杂网络的作战描述模型研究[J].指挥控制与仿真,2007,29(8).
- [13] 谭东风. 信息时代的战争建模[C]//复杂电磁环境下的作战、训练、保障与军事运筹研究,北京:蓝天出版社,2007.
- [14] 董子峰. 梅特卡夫定理与兰彻斯特方程的数学同构性[J].中国军事科学,2005,18(5):97 - 106.
- [15] 张最良,李长生,赵文志,等.军事运筹学[M].北京:军事科学出版社,2000.
- [16] 沙基昌. 数理战术学[M].北京:科学出版社,2003.
- [17] Tatora V, Marchiori M. Efficient Behavior of Small-world Networks[J]. Physics Review Letters,2001,87(19).
- [18] Erdős P, Rényi A. On the Evolution of Random Graphs[R]. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 1960, 5:17 - 61.
- [19] Vladimir Batagelj. Efficient Generation of Large Random Networks [C]//XXIV Social Network Conference, 2004,3:12 - 16.
- [20] Barabási A L, Albert R. Emergence of Scaling in Random Networks [J]. Science,1999,286:509 - 512.
- [21] Crucitti P, Latora V, Marchiori M, et al. Efficiency of Scale-free Networks: Error and Attack Tolerance[J].Physica A 320, 2003: 622 - 642.
- [22] Kinney R, Crucitti P, Albert R, et al. Modeling Cascading Failures in the North American Power Grid[EB/OL].arXiv:cond-mat/0410318v1, 13 Oct 2004.

① 文中式(12)是基于平均域方法推导的,当 n 小时误差较大。离散型 Lanchester 方程的解析解是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} r_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [(1 + \sqrt{q\beta})^n + (1 - \sqrt{q\beta})^n] & -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} [(1 + \sqrt{q\beta})^n - (1 - \sqrt{q\beta})^n] \\ -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} [(1 + \sqrt{q\beta})^n - (1 - \sqrt{q\beta})^n] & [(1 + \sqrt{q\beta})^n + (1 - \sqrt{q\beta})^n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

