

文章编号: 1001-2486(2007)06-0126-05

一种新的基于方向导数的二维自适应网格生成算法*

王礼广^{1,2}, 蔡放^{1,3}, 熊岳山¹

(1. 国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073;

2. 南华大学数理学院, 湖南衡阳 421001; 3. 长沙大学, 湖南长沙 410003)

摘要: 结合形变原理及网格迭代思想, 利用方向导数计算控制函数, 提出一种新的二维空间自适应网格生成算法。数值实验表明, 该算法能较好地适应解函数的空间剧烈变化。与其他自适应算法比较, 其主要优点是该算法逻辑简单, 避免了解网格偏微分方程, 节约了网格计算时间。

关键词: 自适应网格; 移动网格; 有限元方法; 形变方法

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A

A New Algorithm of Mesh Generation for 2-D Adaptive Mesh
Based on Directional DerivativesWANG Li-guang^{1,2}, CAI Fang^{1,3}, XIONG Yue-shan¹

(1. College of Sciences, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. School of Mathematics and Physics, Nanhua University, Hengyang 421001, China; 3. Changsha University, Changsha 410003, China)

Abstract: A new algorithm of mesh generation for 2-D adaptive mesh method is proposed while combining the deformation principle and the idea of mesh iteration by means of directional derivatives to compute the monitor function. The numerical experiments show that this algorithm can well adapt to high spatial activities of the solutions. The main advantage of this algorithm is its simple logicity and it can avoid solving moving mesh partial differential equations and save time for computing mesh to compare the other adaptive algorithms.

Key words: adaptive mesh; moving mesh; finite elements method; deformation method

在偏微分方程(PDE)数值解领域,自20世纪60年代末 Winslow^[1]提出非均匀网格方法以来,自适应网格方法以其高效率和高精度吸引了无数的研究者。目前,自适应网格解一维空间问题已得到较满意的解决,并已在各个领域得到广泛应用^[2]。然而,高维空间问题的解决仍存在许多困难。网格自适应方法最终都转化为解移动网格偏微分方程(MMPDEs)^[3]。这些方法均存在以下问题:(1)产生的网格偏微分方程高度非线性方程,解这些方程往往需要花较大的计算代价;(2)在某些情况(如数值耗散)下,往往产生网格折叠、缠绕等问题;(3)在某些方法中,还要求产生的网格具有光滑性和无偏斜性,有时需强制修改生成的非光滑或偏斜网格。

90年代初, Dvinsky^[4]提出了基于调和映射的自适应网格方法;最近, Li^[5-6]等用调和映射方法对二维和三维奇异问题进行了较好的解决。尽管 Cao^[7-8]等认为调和映射产生的网格的网格密度与实际的密度分布吻合得不十分良好,但其将 PDE 解算法和网格选择程序相分离以及网格迭代的思想很有价值。Liao^[9-10]等在 1995 年,或更早的时候就有人提出了一维空间形变方法以及推广到高维空间的形变方法。众所周知,除了以上提到的问题外,高维空间的形变方法还存在其他一些问题和不确定性^[2,6-7]。

受形变原理和网格迭代思想的启发,本文提出了基于方向导数的二维自适应网格方法。其自适应策略有以下特点:(1)迭代地进行网格细化;(2)每个三角形单元的尺寸大小是基于形变原理用网格结点沿单元某边的方向导数来控制的;(3)网格的细化过程只需要简单的代数运算,无须解复杂的高度非线性网格偏微分方程,降低了网格计算代价;(4)细化过程的每一步均在正则化条件和精细化条件

* 收稿日期: 2007-04-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(60773022); 国家 863 计划资助项目(2007AA01Z313); 湖南省教育厅资助科研项目(06C712)

作者简介: 王礼广(1961—),男,副教授,博士。

下进行,生成的网格没有折叠和缠绕;(5)PDE 的解算法采用有限元方法,对网格的光滑性和偏斜性没有严格的要求,只要求网格正则和足够精细。

1 二维空间自适应网格细化原理

一维空间的形变方法描述有多种^[9]。考虑二维平面上的形变方法网格细化问题。设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 为物理域, $\Omega_c \subset \mathbf{R}^2$ 为参考域,一一映射 ϕ 将 Ω_c 映射为 Ω 。又设对于参考域上的网格结点集 $S' = \{P'_i | P'_i \in \Omega_c, i \in I\}$, P'_i 在 Ω_c 上的坐标为 $X'_i, i \in I$,其中 I 为网格结点指标集。物理域上相对应的网格结点集为 $S = \{P_i | P_i = \phi(P'_i) \in \Omega, P'_i \in S', i \in I\}$, P_i 在 Ω 上的坐标为 $X_i, i \in I$ 。对于 Ω_c 上结点 P'_i 及其邻结点 P'_j ,通过映射 ϕ, Ω 上有对应点 P_i 及其邻结点 P_j 。令

$$\mathbf{l} = P'_j - P'_i, \quad \mathbf{L} = P_j - P_i \quad (1)$$

$$dl = |X'_j - X'_i|, \quad dL = |X_j - X_i| \quad (2)$$

又设 ϕ 在 Ω_c 上的结点 P'_i 沿方向 \mathbf{l} 的方向导数为 $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{l}}$,根据一维空间形变原理^[9],有

$$dL \approx \left| \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{l}} \right| \cdot dl \quad (3)$$

若变换 ϕ 在 Ω_c 中网格结点 P'_i 沿方向 \mathbf{l} 的方向导数满足 $\partial \phi / \partial \mathbf{l} = f(\phi, t) > 0$,则

$$dL \approx \left| \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{l}} \right| \cdot dl = f(\phi(X'_i, t), t) dl = f(X_i, t) dl \quad (4)$$

故网格点 P_i 附近在映射 ϕ 下, Ω 中网格形变长度 dL 与 Ω_c 中网格长度 dl 成正比,比例系数为 $f(X_i; t)$,注意这个系数是 $X_i; t$ 的函数。如果令 $\Omega_c = \Omega$,即将物理网格结点 P_i 看成参考网格结点,则在结点 P_i ,式(4)仍然成立。

事实上,在每个点 P_i 有无穷个方向 \mathbf{l} ,我们不像一维形变方法那样去解网格方程,而仅仅用 ϕ 在结点 P_i 沿方向 \mathbf{l} 的方向导数 $\partial \phi / \partial \mathbf{l} = f(X_i, t)$ 作为在点 P_i 的形变系数来估计 dL 的大小。例如取

$$f(X_i, t) = 1/[1 + K(\partial u / \partial \mathbf{l})^2] \quad (5)$$

其中, u 为原方程的解, K 为控制网格密度的常数(事实上, f 的取法有很大的弹性,如可取 $f(X_i; t) = 1/[1 + K_1 u^2 + K_2 (\partial u / \partial \mathbf{l})^2]$ 。在点 P_i 只须计算出 $\partial u / \partial \mathbf{l}$,则可由式(4)大致估算出 dL 的大小。设

$$X_i = (x_i, y_i), \quad Y = (x, y), \quad \rho = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

由方向导数的定义:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|u(x, y) - u(x_i, y_i)|}{\rho} = \lim_{x \rightarrow x_i, y \rightarrow y_i} \frac{|u(x, y) - u(x_i, y_i)|}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \quad (6)$$

其中, $y = (x - x_i)(y_j - y_i)/(x_j - x_i) + y_i$, 即 (x, y) 沿方向 \mathbf{l} 趋于 (x_i, y_i) 。当 P_j 与 P_i 充分靠近时,近似地有

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_{P_i} \approx \frac{|u(x_j, y_j) - u(x_i, y_i)|}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (7)$$

我们考虑参考域 Ω_c 中一个边长为 h 的正三角形 $\triangle A'B'C'$ 在变换 ϕ 之下映射到物理域 Ω 中的仿射三角形 $\triangle ABC$, 线段 $\overline{A'B'}$ 映射为曲线 \widehat{AB} , 线段 $\overline{A'C'}$ 映射为曲线 \widehat{AC} , 线段 $\overline{B'C'}$ 映射为曲线 \widehat{BC} 。令 $\mathbf{l}_1 = \overline{A'B'}$; $\mathbf{l}_2 = \overline{A'C'}$, 设 $\triangle A'B'C'$ 的面积为 $S_{\triangle A'B'C'}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}$, 则

$$\overline{AB} \approx \left| \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{l}_1} \right| \cdot h, \quad \overline{AC} \approx \left| \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{l}_2} \right| \cdot h \quad (8)$$

$$S_{\triangle ABC} = \lambda \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \approx \lambda \left| \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{l}_1} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{l}_2} \right| h^2 = \mu S_{\triangle A'B'C'} \quad (9)$$

其中, λ, μ 为与 h 无关的常数。推而广之, 设 Ω_c 中的三角形面积微元 $d\sigma'$ 通过 ϕ 映射为 Ω 中的微元 $d\sigma$, 则有 $d\sigma \approx \mu' d\sigma'$, 其中 μ' 为与三角形边长无关的常数, 也可近似看作面积微元变换的雅可比式。

表 1 方程(11) 自适应网格与均匀网格数值误差比较

Tab.1 The comparison of solution error on adaptive mesh and one on uniform mesh for Equ.(11)

Node Number	Adaptive max ϵ	Adaptive max ϵ_r	Uniform max ϵ	Uniform max ϵ_r
432	0.0017047	1.0000	0.0029778	1.000
917	0.0014664	1.0000	0.0020455	1.000

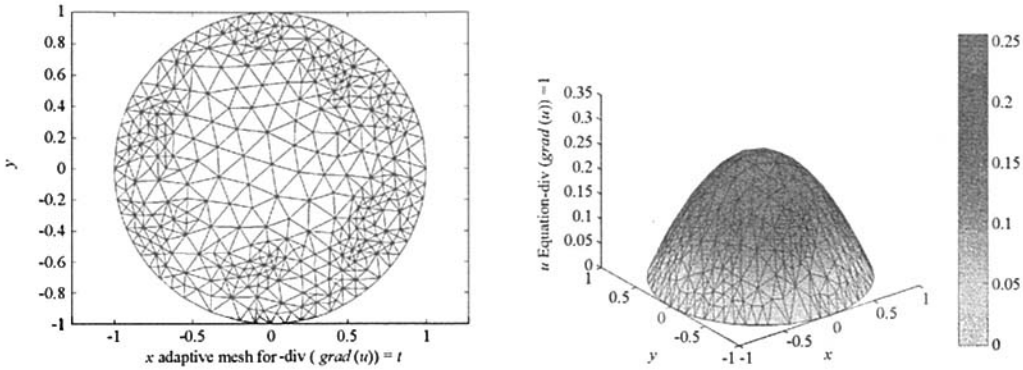


图 1 例 1 当 $N = 432$ 时的自适应网格(左) 及数值解(右)

Fig.1 The adaptive mesh(left) and the numerical solution(right) when $N = 862$ in Ex. 1

由表 1 可见,以数值解绝对误差最大值来度量,该方法比均匀网格效果要好,但它们的相对误差最大值相同。从自适应网格图 1(左)可见,网格稠密部分大致分布在梯度较大的部分,反映了本方法的网格自适应性。图 1(右)为数值解结果。

例 2 圆环 $\Omega = \{(x, y) | 0.01^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上方程

$$\begin{cases} -\Delta u = 1/(x^2 + y^2)^2, & \text{in } \Omega \\ u|_{x^2 + y^2 = 0.01^2} = -2449.75 \\ u|_{x^2 + y^2 = 1} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

的精确解为 $u(x, y) = [1 - 1/(x^2 + y^2)]/4$ 。取 $h = 0.01; \alpha = 0.01; f = 1/[1 + 6u^2 + (\partial u/\partial t)^2]$,分别用本文的方法与均匀网格方法计算方程(12),误差比较见表 2。 $N = 862$ 时例 2 的数值实验结果见图 2。

表 2 方程(12)自适应网格与均匀网格数值误差比较

Tab.2 The comparison of the solution error on adaptive mesh and one on uniform mesh for Equ.(12)

Node Number	Adaptive max ϵ	Adaptive max ϵ_r	Uniform max ϵ	Uniform max ϵ_r
862	2.2965	0.072024	144.97	6.2326
2008	1.0956	0.03326	70.667	3.7066

方程(12)在圆环形解区域上是几乎奇异的。由表 2 可见,对于方程(11),以数值解的绝对误差最大值和相对误差最大值来度量,本文的方法远远优于均匀网格。从自适应网格图 2(左)看,该网格稠密部分较好地集中在几乎奇异的原点附近,反映了本文的方法对解空间剧烈变化良好的网格自适应性。图 2(右)为数值解结果。此外,在主频 1GHz 的英特尔 CPU 微机,用 MATLAB v 6.5 软件对方程(12)编程求解,862 个结点的方程迭代求解时间为 0.931s,2008 个结点的方程迭代求解时间为 1.221s,计算速度得到提高。

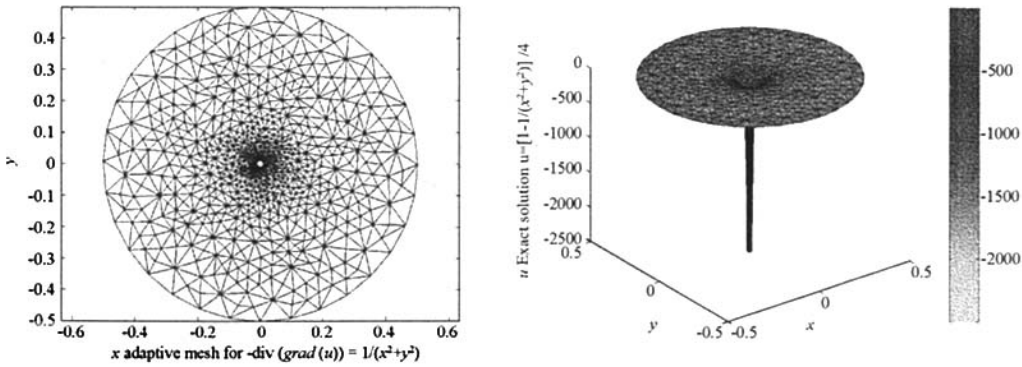


图2 例2当 $N = 862$ 时的自适应网格(左)及数值解(右)

Fig.2 The adaptive mesh(left) and the numerical solution(right) when $N = 862$ in Ex.2

4 结论

根据一维形变原理和网格迭代思想,基于方向导数的二维自适应网格生成算法获得了良好的效果。与其他自适应网格算法比较,其主要优点是该算法逻辑简单,避免了解网格偏微分方程,节约了网格计算时间。

参考文献:

- [1] Winslow A. Numerical Solution of the Quasi-linear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh[J]. J. Comput. Phys., 1967, 1: 149 - 172.
- [2] Zegling P A. Moving Grid Techniques[M]. CRC Press LLC, 1999.
- [3] Huang W Z, Ren Y H, Russell R D. Moving Mesh Partial Differential Equations(MMPDES) Based on the Equidistribution Principle[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1994, 31(3): 709 - 730.
- [4] Dvinsky A S. Adaptive Grid Generation from Harmonic Maps on Riemannian Manifolds[J]. J. Comput. Phys., 1991, 95: 450 - 476.
- [5] Li R, Tang T, Zhang P W. Moving Mesh Methods in Multiple Dimensions Based on Harmonic Maps[J]. J. Comput. Phys., 2001, 170: 562 - 588.
- [6] Li R, Tang T, Zhang P W. A Moving Mesh Finite Element Algorithm for Singular Problems in Two and Three Space Dimensions[J]. J. Comput. Phys., 2002, 177: 365 - 393.
- [7] Cao W M, Carretero-gonzales R, Huang W Z, et al. Variational Mesh Adaptation Methods for Axisymmetrical Problems[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2003, 41(1): 235 - 257.
- [8] Cao W M, Huang W Z, Russell R D. A Moving Mesh Method Based on Thegeometric Conservation Law[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2002, 24(1): 118 - 142.
- [9] Liao G J, Su J Z. A Moving Grid Method for (1 + 1) Dimension[J]. Appl. Math. Lett., 1995, 8(4): 47 - 49.
- [10] Liao G, Liu F, Pena D L, et al. Level-set-based Deformation Methods for Adaptive Grids[J]. J. Comput. Phys., 2000, 159: 103 - 122.

