

文章编号: 1001-2486(2008)01-0005-05

约束层阻尼板动力学问题的传递函数解*

李恩奇, 唐国金, 雷勇军, 李道奎

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 采用传递函数方法对约束层阻尼板进行了动力学分析。使用 Hamilton 原理得到了约束层阻尼板的运动方程和边界条件, 对未知位移进行级数展开, 引入状态向量, 使用分布参数传递函数方法建立系统的状态空间方程进行求解, 分析了四边简支板的自由振动和频率响应问题, 得到了板的固有频率、损耗因子和频响曲线。算例的计算结果与 NASTRAN 计算结果相比吻合良好。

关键词: 传递函数方法; 约束层阻尼板; 黏弹性; 动力学分析

中图分类号: O327 **文献标识码:** A

Dynamic Analysis of Constrained Layer Damping Plate by the Transfer Function Method

LI En-qi, TANG Guo-jin, LEI Yong-jun, LI Dao-kui

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The dynamic problem of constrained layer damping (CLD) plate was investigated with the transfer function method in this paper. The equations of motion and the boundary conditions were derived by using the Hamilton principle. Then the unknown displacements were expressed in Fourier series. With the introduction of the state vector, the governing equation in state space was established by the distributed parameter transfer function method. The closed-form solutions of natural frequencies, loss factors and curves of frequency response of a simply supported CLD plate were obtained. Numerical predictions of this paper agreed very well with the results of NASTRAN.

Key words: transfer function method; constrained layer damping plate; viscoelasticity; dynamics analysis

在受控对象上附加黏弹性阻尼材料及约束层, 构成被动约束层阻尼 (CLD, constrained layer damping) 结构, 它可以将振动能量以热能形式耗散, 从而大大减少结构的振动响应。约束层阻尼结构具有结构简单、易于实现、控制频率宽、稳定可靠和成本低的优点, 广泛应用于航天器结构 (运载火箭的仪器舱, 卫星太阳帆板) 的振动控制、潜艇降噪、建筑结构抗震等方面^[1]。

传统的约束层阻尼板动力学问题研究方法主要有两种: 解析法和有限元法。文献[2]采用 Ritz 法将四边简支约束层阻尼板的位移展开为 $w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{st}$ 的形式, 求解板的自由振动问题。Wang 等^[3] 使用康特洛维奇 (Kantorovich) 方法研究了在对边固支对边自由边界条件下部分覆盖带状 CLD 板的动力学特性和动力学响应问题。有限元法一般分为三层夹心结构^[4] 和约束层阻尼层复合单元两种。文献[4]给出了在 NASTRAN 中分析 CLD 结构的计算原理和建模方法。文献[5-6]构建了新的约束层阻尼层复合板单元, 计算了悬臂板的固有频率和损耗因子。近期出现了一些新的数值分析方法应用于 CLD 结构, 如谱传递矩阵法^[7]、Galerkin 单元法^[8] 和分布参数传递函数方法^[9]。

1 控制方程

典型的约束层阻尼板如图 1 所示, 由基层(1)、黏弹性阻尼层(2)和约束层(3)组成。设基层和约束

* 收稿日期: 2007-03-50

基金项目: 国家“863”计划资助项目(2002AA01006)

作者简介: 李恩奇(1978-), 男, 博士生。

层厚度分别为 h_1, h_3 , 弹性模量分别为 E_1, E_3 , 泊松比分别为 μ_1, μ_3 ; 阻尼层厚度为 h_2 , 复剪切模量为 G_2^* ; 板长为 a , 宽为 b , 约束层阻尼板受均布载荷 $q(x, y, t)$ 。

不失一般性, 约束层阻尼板有以下基本假设: (a) 不计板纵向变形, 且三层纵向位移(挠度)相同; (b) 各层之间没有滑移, 层间位移连续; (c) 基层和约束层采用 Kirchhoff 假设; (d) 只考虑黏弹层的剪切效应, 忽略其纵向刚度(Kerwin 假设); (e) 忽略转动惯量的影响。

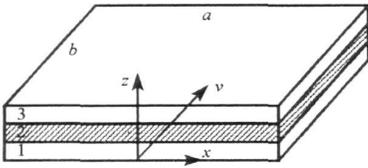


图1 约束阻尼板示意图

Fig. 1 CLD plate

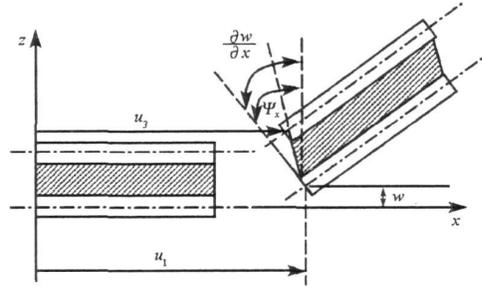


图2 约束阻尼板变形图(x向)

Fig. 2 The deformation pattern of CLD plate (x-direction)

设基板位移列向量 $\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 & v_1 & w \end{Bmatrix}^T$, 其中 u_1, v_1, w 分别为中性面在 x, y, z 三方向上的位移。设基板应变列向量为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x1} & \varepsilon_{y1} & \gamma_{xy1} \end{Bmatrix}^T$, 应力列向量为 $\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{y1} & \tau_{xy1} \end{Bmatrix}^T$, 则基板的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{E}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{E}_1 \mathbf{L} \mathbf{u}_1 \quad (1)$$

$$\text{式中, } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & -2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \mathbf{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \mu_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu_1}{2} \end{bmatrix}。$$

对于约束层, 只需要将以上各式的下标由“1”更换为“3”即可。

图2是 x 向黏弹性层几何变形关系图, y 向变形关系图与图2类似。黏弹层的剪切变形可以表示为

$$\gamma_{xz} = \Psi_x = \frac{1}{h_2} (u_3 - u_1) + c \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \Psi_y = \frac{1}{h_2} (v_3 - v_1) + c \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

这里 $c = 1 + (h_1 + h_3)/2h_2$ 。引入黏弹层应变列向量 $\boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^T$, 应力向量 $\boldsymbol{\tau}_2 = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{Bmatrix}^T$, 且其本构关系采用复模量模型

$$\boldsymbol{\tau}_2(t) = G_2^*(s) \boldsymbol{\gamma}_2(t) \quad (3)$$

约束层阻尼板的应变势能为

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\boldsymbol{\sigma}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\tau}_2^T \boldsymbol{\gamma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3^T \boldsymbol{\varepsilon}_3 \right) dV \quad (4)$$

约束层阻尼板的动能

$$T = \frac{1}{2} \int_A \left[m u^2 + m_1 (u^2 + v^2) + m_3 (u^2 + v^2) \right] dA \quad (5)$$

式中 $m_1 = \rho_1 h_1, m_2 = \rho_2 h_2, m_3 = \rho_3 h_3, m = m_1 + m_2 + m_3$ 。

外力功

$$U_E = - \int_A q(x, y) w dA \quad (6)$$

对于 y 向对边简支约束层阻尼板, 其位移和外载荷可以展开为三角级数的形式,

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} U_{1n}(x, t) \sin \frac{n\pi y}{b} & u_3 = \sum_{n=1}^{\infty} U_{3n}(x, t) \sin \frac{n\pi y}{b} & v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} V_{1n}(x, t) \cos \frac{n\pi y}{b} \\ v_3 = \sum_{n=1}^{\infty} V_{3n}(x, t) \cos \frac{n\pi y}{b} & w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x, t) \sin \frac{n\pi y}{b} & q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x, t) \sin \frac{n\pi y}{b} \end{cases} \quad (7)$$

将位移函数(7)代入 Hamilton 原理 $\delta \int_0^1 (U + U_E - T) dt = 0$, 可以得到约束层阻尼板的控制方程

$$\begin{cases} m_1 \ddot{U}_{1n} - K_1 \left[\frac{\partial^2 U_{1n}}{\partial x^2} - \frac{1+\mu_1}{2} \frac{n\pi}{b} \frac{\partial V_{1n}}{\partial x} - \frac{1-\mu_1}{2} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 U_{1n} \right] - G_2^* \left[\frac{1}{h_2} (U_{3n} - U_{1n}) + c \frac{\partial W_n}{\partial x} \right] = 0 \\ m_1 \ddot{V}_{1n} - K_1 \left[- \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 V_{1n} + \frac{1+\mu_1}{2} \frac{n\pi}{b} \frac{\partial U_{1n}}{\partial x} + \frac{1-\mu_1}{2} \frac{\partial^2 V_{1n}}{\partial x^2} \right] - G_2^* \left[\frac{1}{h_2} (V_{3n} - V_{1n}) + c \frac{n\pi}{b} W_n \right] = 0 \\ m_3 \ddot{U}_{3n} - K_3 \left[\frac{\partial^2 U_{3n}}{\partial x^2} - \frac{1+\mu_3}{2} \frac{n\pi}{b} \frac{\partial V_{3n}}{\partial x} - \frac{1-\mu_3}{2} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 U_{3n} \right] - G_2^* \left[\frac{1}{h_2} (U_{3n} - U_{1n}) + c \frac{\partial W_n}{\partial x} \right] = 0 \\ m_3 \ddot{V}_{3n} - K_3 \left[- \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 V_{3n} + \frac{1+\mu_3}{2} \frac{n\pi}{b} \frac{\partial U_{3n}}{\partial x} + \frac{1-\mu_3}{2} \frac{\partial^2 V_{3n}}{\partial x^2} \right] - G_2^* \left[\frac{1}{h_2} (V_{3n} - V_{1n}) + c \frac{n\pi}{b} W_n \right] = 0 \\ m \ddot{W}_n + (D_1 + D_3) \left[\frac{\partial^4 W_n}{\partial x^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 W_n \right] - G_2^* c \left(\frac{\partial U_{3n}}{\partial x} - \frac{\partial U_{1n}}{\partial x} - \frac{n\pi}{b} V_{3n} + \frac{n\pi}{b} V_{1n} \right) \\ - G_2^* c^2 h_2 \left[\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 W_n \right] = q_n(x, t) \end{cases} \quad (8)$$

和在 $x = \pm 0.5a$ 两边相应的边界条件为

$$\begin{cases} U_{1n} = 0 & \text{或} & \frac{\partial U_1}{\partial x} - \mu_1 \frac{n\pi}{b} V_{1n} = 0 \\ V_{1n} = 0 & \text{或} & \frac{\partial V_{1n}}{\partial x} + \frac{n\pi}{b} U_{1n} = 0 \\ U_{3n} = 0 & \text{或} & \frac{\partial U_3}{\partial x} - \mu_3 \frac{n\pi}{b} V_{3n} = 0 \\ V_{3n} = 0 & \text{或} & \frac{\partial V_{3n}}{\partial x} + \frac{n\pi}{b} U_{3n} = 0 \\ \frac{\partial W_n}{\partial x} = 0 & \text{或} & (D_1 + D_3) \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} - (D_1 \mu_1 + D_3 \mu_3) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 W_n = 0 \\ W_n = 0 & \text{或} & (D_1 + D_3) \frac{\partial^3 W_n}{\partial x^3} - [D_3(2 - \mu_3) + D_1(2 - \mu_1)] \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{\partial W_n}{\partial x} \\ & & - G_2^* c (U_{3n} - U_{1n}) - G_2^* c^2 h_2 \frac{\partial W_n}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

2 传递函数方法的应用

对控制方程(8)进行 Laplace 变换, 定义状态向量

$$\tilde{\eta}_n = \left\{ \tilde{U}_{1n}, \frac{\partial \tilde{U}_{1n}}{\partial x}, \tilde{V}_{1n}, \frac{\partial \tilde{V}_{1n}}{\partial x}, \tilde{U}_{3n}, \frac{\partial \tilde{U}_{3n}}{\partial x}, \tilde{V}_{3n}, \frac{\partial \tilde{V}_{3n}}{\partial x}, \tilde{W}_n, \frac{\partial \tilde{W}_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 \tilde{W}_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 \tilde{W}_n}{\partial x^3} \right\}^T \quad (10)$$

则控制方程可以改写为状态空间方程的形式

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\eta}_n(x, s) = \mathbf{F}_n(s) \tilde{\eta}_n(x, s) + \tilde{f}_n(x, s) \quad (11)$$

其中 $\mathbf{F}_n(s) \in C^{12 \times 12}$, 由(8)式推导得到, $\tilde{f}_n(x, s) = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\tilde{q}_n}{D_1 + D_3} \right\}^T$ 。

边界条件(9)可以改写为

$$\mathbf{M}_{ln} \tilde{\eta}_n(-0.5a, s) + \mathbf{N}_{ln} \tilde{\eta}_n(0.5a, s) = \tilde{y} \quad (12)$$

这里 M_{bn} 和 N_{bn} 是边界条件选择矩阵, $\tilde{y}_n = \mathbf{0}$ 。

方程 (11) 的解为^[9]

$$\tilde{\eta}_n = \int_{-0.5a}^{0.5a} \mathbf{G}_n(x, \xi, s) \tilde{f}_n(\xi, s) d\xi + \mathbf{H}_n(x, s) \tilde{y}_n(s) \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{G}_n(x, \xi, s) = \begin{cases} e^{F(s)x} [\mathbf{M}_{bn} e^{-0.5aF_n(s)} + \mathbf{N}_{bn} e^{0.5aF_n(s)}]^{-1} \mathbf{M}_{bn} e^{F_n(s)} (-0.5a - \xi), & \xi \leq x \\ -e^{F(s)x} [\mathbf{M}_{bn} e^{-0.5aF_n(s)} + \mathbf{N}_{bn} e^{0.5aF_n(s)}]^{-1} \mathbf{N}_{bn} e^{F_n(s)} (0.5a - \xi), & \xi > x \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_n(x, s) = e^{F_n(s)x} [\mathbf{M}_{bn} e^{-0.5aF_n(s)} + \mathbf{N}_{bn} e^{0.5aF_n(s)}]^{-1}$$

则利用 (7) 式可以得到约束层阻尼板的频域响应。

求解特征方程

$$\det[\mathbf{M}_{bn} e^{-0.5aF_n(s)} + \mathbf{N}_{bn} e^{0.5aF_n(s)}] = 0 \quad (14)$$

便可得到系统的特征值 s_i , 约束层阻尼板的固有频率和损耗因子, 相应的模态是 $\tilde{\eta}(x, \omega) = e^{F(s_i)x} \varphi_i$, 其中 φ_i 是方程 $[\mathbf{M}_{bn} e^{-0.5aF_n(s)} + \mathbf{N}_{bn} e^{0.5aF_n(s)}] \varphi_i = 0$ 的非零解。

3 计算结果

约束层阻尼板长 0.4m、宽 0.4m, 约束层 $E_3 = 2.058 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $h_3 = 3\text{mm}$, $\rho_3 = 7840\text{kg/m}^3$, 基层 $E_1 = 6.762 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $h_1 = 1.2\text{mm}$, $\rho_1 = 2803\text{kg/m}^3$, 阻尼层采用复常量模型 $G_2 = 518330.0 \times (1 + 0.968i) \text{ Pa}$, $h_2 = 1.2\text{mm}$, $\rho_2 = 2803\text{kg/m}^3$ 。用本文方法计算约束层阻尼板的前 7 阶固有频率和损耗因子列于表 1, 同时表中也给出了大型有限元软件 NASTRAN 的计算结果, 其中 HEX8 表示整个结构都使用 HEX8 体单元建模, Quad4 表示黏弹性阻尼层采用 HEX8 体单元、约束层和基层采用平面 Quad4 单元建模 (Quad4 单元特性中必须增加板中性面偏移量, 否则误差较大)。 S_{mn} 表示约束层阻尼板在 x 方向有 m 个半波, y 方向有 n 个半波时的特征值。

表 1 四边简支约束层阻尼板的动力学特性

Tab. 1 Dynamic characteristics of the simply supported CLD plate

阶数		固有频率 (Hz)			损耗因子		
		传递函数法	HEX8	Quad4	传递函数法	HEX8	Quad4
1	S_{11}	84.3787	84.1848	83.8295	0.0618	0.0604	0.0602
2	S_{12} 或 S_{21}	206.4397	206.2624	204.8660	0.0269	0.0263	0.0263
3	S_{22}	328.5010	326.3234	323.1370	0.0172	0.0169	0.0168
4	S_{13} 或 S_{31}	409.8761	411.5580	406.5159	0.0138	0.0133	0.0133
5	S_{23} 或 S_{32}	531.9396	528.2694	520.6559	0.0107	0.0104	0.0104
6	S_{14} 或 S_{41}	694.6915	703.0613	688.4309	0.0082	0.0078	0.0078
7	S_{33}	735.3796	724.6177	711.5499	0.0078	0.0077	0.0076

比较表 1 中结果知, 复常量模型传递函数方法的计算结果与有限元计算结果十分吻合, 误差很小, 说明了传递函数方法的正确性。在使用 NASTRAN 计算时, HEX8 建模的结果较 Quad4 建模更接近于传递函数解, 且如采用 Quad4 单元建模, 会得到更多的高频局部模态。图 3 给出了约束层阻尼板第三阶频率的振型图, 从图中知纵向位移同横向位移相比是小量, 板做横向弯曲振动。

保持其他计算参数不变, 将复常量模型改为复变量模型。黏弹性的松弛函数

$$G(t) = 3.441 + 7.0887e^{-193.39t} + 231.23e^{-16345.9t} + 1744.4e^{-4853.18t}$$

单位为 10^5 Pa , $G_2^* = sG$ 是黏弹性材料的复剪切模量。增加面均布载荷 $q(x, y, t) = \delta(t)$, 求解约束层阻尼板的频率响应。级数展开项 $n = 10$ 。图 4 是板中心点 Z 向位移响应的幅频曲线, 图 5 是相频曲线。

图中本文计算结果曲线与 NASTRAN 结果曲线十分吻合, 使用传递函数方法可以分析约束层阻尼板的频率响应问题, 且可以考虑黏弹性材料性能的频变特性。在图 4 中, 具有约束层阻尼的两条曲线明显低于无约束层阻尼的情况下的频率响应曲线, 这说明约束层阻尼具有很好的减振效果。

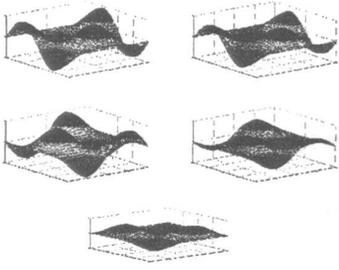


图 3 约束层阻尼板第三阶频率振型图
Fig. 3 The 3rd mode shape of CLD plate

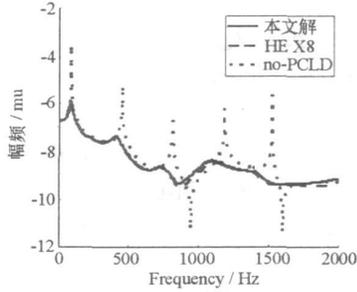


图 4 中点位移响应幅频曲线
Fig. 4 The amplitude-frequency curve of displacement response

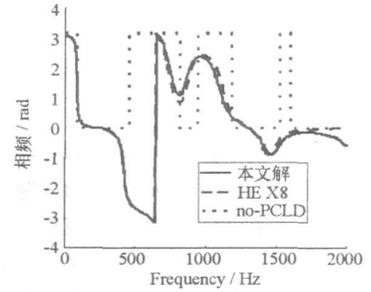


图 5 中点位移响应相频曲线
Fig. 5 The phase-frequency curve of displacement response

4 结论

(1) 通过与 NASTRAN 计算结果和文献结果的比较, 证明了采用传递函数方法所得计算结果的正确性。

(2) 传统解析法的特征方程为 25 阶多项式方程^[2], 求解十分复杂; 而对于传递函数方法, 黏弹性复模量体现在状态矩阵 $F(s)$ 中, 求解系统响应时是对其进行积分运算, 理论上适用于所有线性黏弹性复模量模型, 且用此方法处理复模量随频率变化的黏弹性材料问题十分简捷。

(3) 文献[5]采用有限元方法分析约束层阻尼结构, 系统自由度维数高, 需要对动力学模型进行降阶。而本文是在系统的动力学方程基础上, 直接得到状态空间方程, 求解系统响应, 系统维数低, 避免了动力学模型降阶工作, 极大地简化了计算, 增强了系统的可观度和可控度。因此本文方法更适用于主动约束层阻尼结构的动力学分析。

参考文献:

- [1] 张景绘, 李宁, 李新民, 等. 一体化振动控制——若干理论、技术问题引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] 钱振东, 陈国平, 朱德懋. 约束阻尼层板的振动分析 [J]. 南京航空航天大学学报, 1997, 29(5): 517-522.
- [3] Wang G, Wereley N M, Chang D C. Analysis of Plates with Passive Constrained Layer Damping Using 2D Plate Modes [C]// 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Con. Denver, Colorado, 2002.
- [4] Johnson C D. Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers [J]. AIAA, 1982, 20(9): 1284-1290.
- [5] 邓年春, 邹振祝, 杜华军, 等. 约束阻尼板的有限元动力分析 [J]. 振动工程学报, 2003, 16(4): 489-492.
- [6] 刘天雄, 华宏星, 陈兆能, 等. 约束层阻尼板的有限元建模研究 [J]. 机械工程学报, 2002, 38(4): 108-114.
- [7] 王淼, 方之楚. 主动约束层阻尼部分覆盖圆柱壳耦合振动控制 [J]. 应用力学学报, 2005, 22(4): 546-549.
- [8] Zhang Q J, Sainsbury M G. The Galerkin Element Method Applied to the Vibration of Rectangular Damped Sandwich Plates [J]. Computers and Structures, 2000, 74: 717-730.
- [9] 李恩奇, 雷勇军, 唐国金, 等. 基于传递函数方法的约束层阻尼梁动力学分析 [J]. 振动与冲击, 2007, 26(2): 75-78.