

文章编号: 1001- 2486(2008) 01- 0069- 04

# 基于面积比矩阵的加权特征向量点匹配算法\*

谭志国, 孙即祥, 王文惠, 滕书华

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 提出一种在仿射变换下点集关系描述算子——面积比矩阵, 证明了其在仿射变换群下的不变性质; 并由该性质推导出特征向量(EA)匹配算法抗噪性能差的原因, 在此基础上给出了基于面积比矩阵的加权特征向量算法。算法构造不同图像的面积比矩阵, 对矩阵进行分解得到其特征值和特征向量, 通过特征值进行加权获得图像中点的特征向量, 比较图像点的特征向量获取匹配关系。因面积比矩阵的仿射不变性质, 算法能实现仿射变换下点集精确匹配; 采用的加权特征向量法改进了EA匹配法, 具有更好的抗噪性能。实验表明算法切实可行。

**关键词:** 计算机视觉; 点匹配; 面积比矩阵; 加权特征向量法

**中图分类号:** TN919      **文献标识码:** A

## A Weighted Eigenvector Point Matching Algorithm Based on Area-ratio Matrix

TAN Zhi-guo, SUN Ji-xiang, WANG Wen-hui, TENG Shu-hua

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Area-ratio matrix, a new point-set distribution descriptor, is given in the paper, which is an invariance under affine transformation. Based on this, the paper reasoned out why the classic eigenvector approach (EA) matching algorithm has inferior anti-noise ability. To solve the problem, the paper proposes an algorithm of weighted eigenvector point matching algorithm based on area-ratio matrix (WEA-ARM). The algorithm enhances the EA's anti-noise ability, and can match point sets under not only the equilateral transformation but also affine transformation. Experiments on both synthetic point sets and real images show the practicability of the algorithm and the correctness of the conclusions in the paper.

**Key words:** computer vision; point matching; area-ratio matrix; weighted eigenvector approach

目前立体视觉匹配按匹配基元进行分类有三种方法: 灰度区域匹配, 图像特征匹配和相位匹配。图像特征匹配是这三种方法中可靠性和鲁棒性最好的一种方法。图像特征匹配可分为以面、线、点等为基础的匹配, 其中以点匹配最为基础和重要, 也最难解决, 因而一直都受到广泛的研究和关注。特征向量匹配算法是图像点匹配中较为经典的方法之一, 它借助谱图理论方法来进行图像匹配的分析。该方法最初由 Longuet-higgins 和 Scott<sup>[1]</sup> 引入到图像匹配领域, 通过构造图像之间点的亲近矩阵来获得对应关系, 但该方法对较大角度的旋转效果不好。为此, Shapiro 和 Brady<sup>[2]</sup> 采用图像内部点的亲近矩阵来进行匹配, 利用图像内部点之间距离的高斯函数值来构造亲近矩阵, 由特征向量分解获取图像中点的特征向量(Feature Vector), 通过比较点的特征向量来获得匹配关系, 但该方法在实际应用中抗噪性能较差。Pilu<sup>[3]</sup> 提出在构造亲近矩阵时加入点邻域的灰度约束, 文献[4]中也给出数种构造亲近矩阵的方法。上述几种方法在改善算法匹配性能上主要是从构造亲近矩阵着手, 没有触及问题本质, 因而很难改善以特征向量分解为基础的算法的抗噪性能; 另外, 它们是在等距或相似变换假设下进行的点集匹配, 不能实现更高维仿射变换情况下的匹配, 而这种情况在实际图像中却是普遍存在的。

本文介绍了一种仿射变换下点集关系描述算子——面积比矩阵, 分析了经典 EA 匹配算法<sup>[2]</sup> 抗噪性能差的原因, 提出了一种新的算法——基于面积比矩阵的加权特征向量匹配算法(WEA-ARM)。算法

\* 收稿日期: 2007- 07- 20

作者简介: 谭志国(1978—), 男, 博士生。

解决两个问题: 实现了仿射变换下的点集匹配; 提高了经典特征向量(EA) 匹配算法<sup>[2]</sup>的抗噪性能。

## 1 点集的面积比矩阵

两待匹配图像中分别提取特征点集  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  和  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , 设  $Q$  可由  $P$  通过仿射变换所得。对点集分别构建矩阵  $H = \{h_{ij}\}$ , 矩阵元素由下式决定:

$$h_{ij}^p = \exp\left(-\sum_k A_{ik}^p / \sigma^2 A_{kj}^p\right); \quad i \neq j \quad (1)$$

其中, 上标  $p$  表示点集属性,  $A_{ij}^p$  表示由  $p_i, p_j$  与  $\bar{p}$  所构成三角形的面积( $\bar{p}$  为点集质心),  $\sigma$  为适当的高斯参数。当  $i = j$  时, 取  $h_{ij}^p = 0$ 。

定理 1 设  $P, Q$  点集中任意两点与其质心不在同一直线上, 矩阵  $H^p$  和  $H^q$  中由匹配点对决定的对应矩阵元素不变, 即若  $p_i \leftarrow q_s, p_j \leftarrow q_t$ , 则  $h_{ij}^p = h_{st}^q$  相等( $\leftarrow$ 表示匹配对应)。

证明 设  $\bar{p}, \bar{q}$  分别为  $P, Q$  点集的质心, 显然在仿射变换下,  $\bar{p}, \bar{q}$  必然匹配对应。

由仿射变换下三角形面积比的不变性, 对于任意匹配点对  $p_i \leftarrow q_s$ , 则有  $P$  中  $p_i, p_j, \bar{p}$  构成三角形面积与  $p_i, p_t, \bar{p}$  构成三角形面积比和  $Q$  中  $q_s, q_t, \bar{q}$  构成三角形面积比相等, 即  $A_{ij}^p / A_{st}^p = A_{st}^q / A_{ij}^q$ 。因而有  $\sum_k A_{ik}^p / A_{kj}^p = \sum_k A_{sk}^q / A_{jt}^q$ 。

由式(1)有  $h_{ij}^p = h_{ji}^p = h_{st}^q = h_{ts}^q$ 。证毕。

由上可知,  $h_{ij}$  是仿射不变量面积比进行高斯加权得到的。文献[1]指出, 亲近矩阵是点集内部点之间距离(正交不变量)的高斯函数值构成。推广该概念, 亲近矩阵可以理解为某变换下不变量的高斯函数值构成的矩阵, 则矩阵  $H$  是在仿射变换下的亲近矩阵, 且有

$$H^q = TH^pT' \quad (2)$$

其中,  $T = [t_{ij}]$  为置换矩阵, 有  $p_i \leftarrow q_j, t_{ij} = 1$ , 否则  $t_{ij} = 0$ 。

套用文献[1]中特征向量分解的方法来获得点集之间的匹配关系。Shapiro 和 Brady 通过构造亲近矩阵, 利用高斯函数来提高算法整体的抗噪性能。算法是把点集中点的特征(由亲近矩阵确定的关系特征)分别投影到一个相似的  $n$  维空间中, 该空间是由亲近矩阵特征值对应的特征向量所构成, 通过比较点在空间投影坐标的相似性来确定匹配关系。然而亲近矩阵本质上仍是邻接矩阵, 因此 Shapiro 和 Brady 的算法仍然存在抗噪性能差的问题。

## 2 EA 匹配算法的抗噪性能分析

### 2.1 严格匹配

设两点  $p_i, q_s$  匹配对应, 则对于已知匹配点对  $p_j, q_t, j \neq i, s \neq t$ , 有  $h_{ij}^p = h_{st}^q$ 。对  $H^p, H^q$  矩阵进行如下分解:

$$H^p = U\alpha U', \quad H^q = V\beta V' \quad (3)$$

其中,  $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ , 为特征值(降序排列)对角矩阵,  $U, V$  每列分别为  $H^p, H^q$  特征向量构成的正交矩阵。上述分解  $U, V$  的列向量在相差一个符号条件下是唯一确定的, 但两者元素的顺序不同。对已知匹配点对  $p_j, q_t$  也有类似性质, 即  $U$  的第  $j$  行和  $V$  的第  $t$  行向量相差一个符号, 且顺序一致<sup>[1]</sup>。由分解有

$$h_{ij}^p = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{ik} u_{jk}, \quad h_{st}^q = \sum_{k=1}^n \beta_k v_{sk} v_{tk} \quad (4)$$

因此

$$\left( \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{ik} u_{jk} - \sum_{k=1}^n \beta_k v_{sk} v_{tk} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

由 SVD 分解性质有,  $|u_{jk}| = |v_{tk}| = w_k$  和  $\alpha = \beta = \gamma$ , 则上式变为

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k w_k [ \text{sign}(u_{jk} u_{ik}) |u_{ik}| - \text{sign}(v_{ik} v_{sk}) |v_{sk}| ] \right\}^2 = 0 \quad (6)$$

其中,  $\text{sign}()$  为符号函数。如果  $p_i, p_j$  匹配, 则有  $\text{sign}(u_{jk} u_{ik}) = \text{sign}(v_{ik} v_{sk})$ , 因此在两点匹配时, 满足上式的充分条件是

$$|u_{ik}| - |v_{sk}| = 0, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (7)$$

即为特征向量匹配算法中的匹配条件。推广到非严格匹配情况下, 算法取

$$|u_{ik}| - |v_{sk}| \leq \varepsilon, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

作为匹配条件。利用式(8), 由严格匹配推广退化到非严格匹配是很自然的一步, 而正是这种近似, 导致了EA匹配算法的抗噪性能较差。

## 2.2 非严格匹配

对非严格匹配, 式(5)退化为

$$\left( \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{ik} u_{jk} - \sum_{k=1}^n \beta_k v_{sk} v_{tk} \right)^2 \leq \varepsilon \quad (9)$$

前述条件  $|u_{jk}| = |v_{tk}| = w_k$  和  $\alpha = \beta = \gamma$  一般不成立。式(9)需要考虑  $\alpha, \beta, u_j, v_t$  的变化。通常  $u_j, v_t$  中元素的变化远小于  $\alpha, \beta$  中元素的变化, 因而仍认为  $|u_{jk}| = |v_{tk}| = w_k$ , 则得到

$$\left\{ \sum_{k=1}^n w_k [ \alpha_k \text{sign}(u_{jk} u_{ik}) |u_{ik}| - \beta_k \text{sign}(v_{tk} v_{sk}) |v_{sk}| ] \right\}^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n w_k [ \alpha_k |u_{ik}| - \beta_k |v_{sk}| ] \right)^2 \quad (10)$$

上式同样考虑到  $\text{sign}(u_{jk} u_{ik}) = \text{sign}(v_{tk} v_{sk})$ , 这时匹配条件退化为

$$| \alpha_k |u_{ik}| - \beta_k |v_{sk}| | \leq \varepsilon, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

此时, 如果考虑  $\alpha_k \approx \beta_k$ , 式(11)即退化为式(8), 也即特征向量匹配算法中的匹配条件。

通过上述推导可得到下述结论: EA匹配算法中点特征向量比较的前提是所构成的  $n$  维空间是不变、相似的或相近的; EA匹配算法的抗噪能力完全是由亲近矩阵, 或者说是高斯函数决定; 式(8)是式(11)的特殊情况, 即当  $\alpha, \beta$  非常接近时等价。式(11)表明, 点特征向量的元素是有权重的, 严格匹配情况下难以体现, 在受噪声等因素干扰情况下可明显体现。

## 3 基于面积比矩阵的加权特征向量匹配算法

EA匹配算法抗噪性能不好是由两个因素综合作用所致: 一是噪声引起分解构成的空间产生较大的变化; 二是点特征向量的每个分量是有权重的, 依对应特征值而定。因此把点在空间中每一维的坐标(如式(11))用对应特征值来加权可以减小这种误差。相对式(8), 式(11)考虑了分解空间的变化因素和分量的权重因素, 使算法具有更好的鲁棒性, 因而更具一般性。

结合第2节, 为实现仿射变换下的点集匹配, 用点集的面积比矩阵来代替亲近矩阵, 由此给出基于面积比矩阵的加权特征向量匹配算法具体步骤:

(1) 构造点集  $P, Q$  的面积比矩阵  $H^p, H^q$ ;

(2) 分别对面积比矩阵  $H^p, H^q$  进行式(3)分解, 得到特征向量矩阵  $U = [u_{ij}]$ ,  $V = [v_{ij}]$  和特征值矩阵  $\alpha = \text{diag}\{\alpha_i\}$ ,  $\beta = \text{diag}\{\beta_i\}$ ;

(3) 分别构造新的特征向量——加权特征向量:

$$\hat{u}_i = [\hat{u}_{ij}] = [\alpha |u_{ij}|], \quad \hat{v}_i = [\hat{v}_{ij}] = [\beta |v_{ij}|], \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

(4) 构造匹配关系矩阵  $M = [m_{ij}] = [|\hat{u}_i - \hat{v}_j|]$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ), 根据判断  $m_{ij}$  是否同时是行与列的最小来确定特征点的匹配关系。

## 4 实验

共进行了三组实验。第一组实验, 利用人工点集来测试算法在仿射变换(包括等距变换和相似变换情况)下的匹配能力, 共进行100次测试, 匹配正确率为100%, 图1给出部分结果。其中, 实心点表示原

点集, 空心点表示经过仿射变换后点集, 图中标架分别演示了变换前后点集在图像坐标和仿射坐标下整体变化情况。第二组实验, 对 10 组真实图像进行了 150 次实验。实验中, 先从图像对中提取相同个数的角点, 分别运用本文算法和 EA 匹配算法进行匹配, 给出一次真实图像对的实验结果, 如图 3 所示。前两组实验中, EA 匹配算法平均准确率为 84.08%, 本文算法匹配平均准确率达到 94.68%。第三组实验, 选取 5 组具有仿射形变的真实图像对进行 50 次实验, 算法匹配平均准确率 93.51%, 图 2 给出其中一次实验匹配结果。

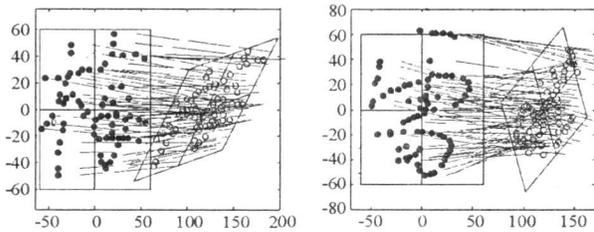


图 1 人工点集匹配情况(漏误匹配率0%)

Fig. 1 Synthetic point sets matching result

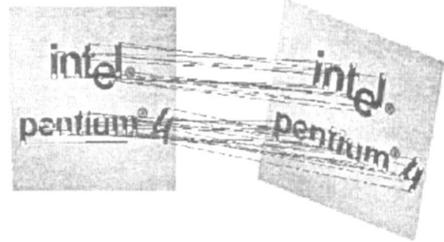
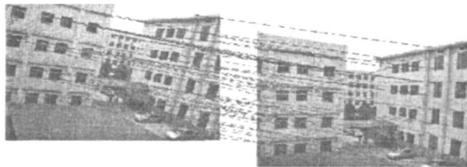
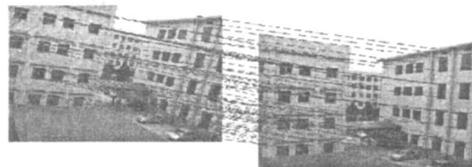


图 2 仿射变换情况(漏误匹配率2.43%)

Fig. 2 Case for affine transformation



(a) EA 匹配算法结果(漏误匹配率16.67%)



(b) 本文算法结果(漏误匹配率1.25%)

图 3 室外复杂场景

Fig. 3 Outdoor scenes

## 5 结论

给出了一种在仿射变换情况下新的点集关系描述算子——面积比矩阵, 它能较好描述仿射变换下点集中点与点之间的不变关系。由该不变关系出发分析推导出经典特征向量匹配算法抗噪性能不佳的原因, 基于推导结果提出了基于面积比矩阵的加权特征向量匹配算法。与特征向量匹配算法比较: 由于使用了面积比矩阵作为亲近矩阵, 本文算法实现了仿射变换下特征点集的匹配; 加权特征向量法, 利用式(11)作为匹配条件, 充分考虑了投影空间变化因素和点特征向量权重因素, 使本文算法具有更好的抗噪性能。实验表明结论正确, 算法切实可行。

## 参考文献:

- [1] Scott G L, Longuet-higgins H. An Algorithm for Associating the Features of Two Patterns [C]//Proceedings of Royal Society London, 1991, 244: 21-26.
- [2] Shapiro L S, Brady J M. Feature-based Correspondence: An Eigenvector Approach [J]. Image and Vision Computing, 1992, 10(5): 283-288.
- [3] Pilu M. Direct Method for Stereo Correspondence Based on Singular Value Decomposition [J]. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1997: 261-266.
- [4] Carcassoni M, Hancock E R. Spectral Correspondence for Point Pattern Matching [J]. Pattern Recognition, 2003, 36(1): 193-204.
- [5] 罗诗途, 张玕, 王艳玲, 等. 一种基于特征匹配的实时电子稳像算法[J]. 国防科技大学学报, 2005, 27(3): 45-48.