

文章编号: 1001- 2486(2008) 01- 0094- 05

存在工作历程产品的加速寿命试验统计分析*

汪亚顺, 张春华, 陈 循, 谭源源

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 加速寿命试验(ALT)可在较短时间内获得产品的寿命及可靠性信息。利用 ALT 对产品的剩余寿命进行评估时,常常将已工作过的产品进行抽样并投入试验,在这一类样本的 ALT 数据统计分析时如何处理初始工作时间,成为 ALT 应用中的一个重要问题。工程实际中评估此类样本的剩余寿命时常常忽略初始工作时间,将其视为“用后如新”或“无记忆性”产品。但此假设必须以产品寿命服从指数分布为前提,而大部分机电产品的寿命服从 Weibull 分布,因而该方法在应用时必然会产生较大误差。针对这一问题提出了一种新的基于时间折算的 ALT 数据统计分析方法,并利用 Monte Carlo 仿真对其估计特性进行对比研究,结果表明此方法能有效评估存在初始工作历程产品的剩余寿命,估计精度优于原方法。

关键词: 加速寿命试验; Monte Carlo 仿真; 工作历程; 可靠性

中图分类号: TB114.3 **文献标识码:** A

Statistical Analysis of Accelerated Life Testing for Products with Operational Period

WANG Ya-shun, ZHANG Chun-hua, CHEN Xun, TAN Yuan-yuan

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Accelerated life testing (ALT) of a product or material can obtain information quickly on its life or reliability information. Products or materials with operational period are often sampled and tested to evaluate their residual life. However, it is a main challenge how to deal with the operational period in statistical analysis for ALT application. The products are often treated as “new after operation” or “memoryless” and their operational period is ignored in residual life evaluation on the assumption that their failure times follow exponential distribution. Since failure times of many mechatronics products follow Weibull distribution, the estimated precision of residual life of the products is low in the way mentioned above. This paper presents a novel approach based on equivalent time to statistically analyze ALT data of products or material with operational period. Estimated precision of the approach was studied by Monte Carlo simulation method. Results show that the approach can effectively estimate the residual life of the products and is more precise than that adopted previously.

Key words: accelerated life testing; Monte Carlo simulation; operational period; reliability

加速寿命试验(ALT: Accelerated Life Testing)将产品置于比使用应力水平严酷的加速应力水平下进行试验,使产品在较短的时间内失效,记录失效时间数据,通过对失效数据的统计分析,得到加速模型及寿命分布参数,可在较短时间内获得产品的寿命及可靠性信息。ALT 技术为产品剩余寿命评估提供了一种低成本、高效率的解决方案。但是在 ALT 的产品剩余寿命评估应用中,产品往往都历经了一段工作时间,因而如何对具有初始工作时间的产品 ALT 数据进行统计分析,成为基于 ALT 的产品剩余寿命评估技术中的关键问题。

Zhao 和 Xie 指出,评估产品贮存可靠性时必须考虑数据收集时间起点之前的失效数据,并建立了考虑初始失效的贮存可靠性评估模型^[1]。众多 ALT 统计分析相关文献解决了恒定应力、步进应力及序进应力条件下,指数分布、Weibull 分布及对数正态分布场合,定时、定数截尾时失效数据的统计分析问题,

* 收稿日期: 2007- 06- 29

基金项目: 国家部委资助项目(203020102)

作者简介: 汪亚顺(1978—),男,博士生。

但都忽略初始工作时间, 将其视为“用后如新”或“无记忆性”产品^[2]。此假设必须以产品寿命服从指数分布为前提, 而大部分机电产品的寿命服从 Weibull 分布, 因而忽略初始工作时间必然会产生较大误差。

1 存在工作历程产品 ALT 统计分析问题描述

设产品初始工作时间为 t_0 , 恒定应力 ALT 的 k 个标准化应力水平为 $\xi_i (0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_k)$, $\xi_i = (x_i - x_0)/(x_k - x_0) (i = 0, 1, \dots, k)$, x 为应力水平。每一子试验的样本量为 N_i , 采取定时截尾方式, 截尾时间分别为 τ'_i 。试验得到失效样本(以试验开始时刻作为计算起点):

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1: t'_{1,1}, t'_{1,2}, \dots, t'_{1,r_1} \\ \xi_2: t'_{2,1}, t'_{2,2}, \dots, t'_{2,r_2} \\ \vdots \\ \xi_j: t'_{j,1}, t'_{j,2}, \dots, t'_{j,r_j} \\ \vdots \\ \xi_k: t'_{k,1}, t'_{k,2}, \dots, t'_{k,r_k} \end{array} \right. \quad (1)$$

其中, r_i 为到截尾时间 τ'_i 为止的失效数。

2 模型假设

(1) 产品寿命 t 相互独立, 且服从 Weibull(α, β) 分布, 其中 α 为尺度参数, β 为形状参数。即应力水平 x_i 下 Weibull 失效分布函数为

$$F_i(t) = 1 - \exp[-(t/\alpha_i)^\beta], i = 1, \dots, k \quad (2)$$

(2) 加速模型为

$$y_i = \ln \alpha = y_0 + y_1 \xi_i \quad (3)$$

其中 y_i 为对数特征寿命。

(3) β 为与 x 无关的常数, 即在各应力水平下, 产品失效机理一致。

(4) Nelson 累积失效模型(Cumulative Exposure Model: CEM): 样本的残存寿命仅依赖于已累积的失效和当前应力, 而与累积方式无关。

3 统计分析方法

3.1 忽略样本初始工作历程的 ALT 统计分析方法

将抽样样本视为“用后如新”或“无记忆性”产品, 忽略样本初始工作历程, 即忽略初始工作时间 t_0 。从试验开始的时刻计时, 记录样本的失效时间, 到截尾时间时终止试验, 直接利用定时截尾 ALT 统计分析方法对失效数据进行处理, 得到使用应力下产品的剩余寿命及可靠性信息^[3]。

3.2 基于初始工作时间折算的 ALT 统计分析方法

考虑样本初始工作历程中的应力水平及试验阶段的应力水平, 并将正常使用应力看作某一加速应力, 则实际上样本所经受的是简单步进 ALT。在这种情况下恒定应力 ALT 的每一个子试验相当于一个简单步进 ALT, 即对子试验 i , 样本首先在 x_0 下试验 t_0 时间, 然后在 x_i 下试验 τ'_i 时间, 如图 1 所示。

针对图 1 所示的复合应力加速寿命试验, 首先将初始工作时间 t_0 折算到恒定应力水平 x_i , 得到等价试验时间 s_i 。时间折算的依据为两应力水平下样

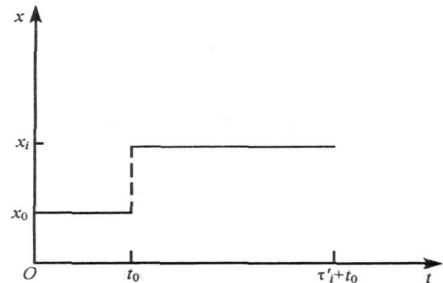


图 1 子试验 i 的应力加载历程

Fig. 1 Exerting sequence of stress levels for sub-experiment i

本的累计失效概率相等^[4]:

$$F_0(t_0) = F_i(s_i) \quad (4)$$

由式(2)有

$$1 - \exp[-(t_0/\alpha_0)^\beta] = 1 - \exp[-(s_i/\alpha_i)^\beta] \quad (5)$$

$$t_0/\alpha_0 = s_i/\alpha_i \quad (6)$$

根据式(3)得

$$s_i = t_0 \cdot \frac{\alpha_i}{\alpha_0} = t_0 \cdot \frac{\exp(Y_0 + Y_1 \xi_i)}{\exp(Y_0 + Y_1 \xi_0)} = t_0 \cdot e^{Y_1 \xi_i} \quad (7)$$

式中, t_0 为使用应力水平下的工作时间, 即初始工作时间。

样本在子试验 i 中的失效时间为试验记录的失效时间加上折算时间, 即

$$t_{ij} = t'_{ij} + s_i = t'_{ij} + t_0 e^{Y_1 \xi_i} \quad (8)$$

而子试验 i 截尾时间变为

$$\tau_i = \tau'_i + s_i = \tau'_i + t_0 e^{Y_1 \xi_i} \quad (9)$$

由于 s_i 中含有加速模型未知参数, 所以 t_{ij} 为准样本。经过这一转换得到的准样本为标准的恒定应力加速寿命试验数据。

利用极大似然估计方法对模型参数(β , Y_0 , Y_1)进行估计。在准样本的基础上, 可得到应力水平 ξ 下的似然函数及对数似然函数:

$$L_i = \left[\prod_{j=1}^{r_i} f_i(t_{ij}) \right] \cdot [1 - F_i(\tau_i)]^{N_i - r_i} = \left[\prod_{j=1}^{r_i} \beta e^{-\beta y_i} t_{ij}^{\beta-1} \exp(-t_{ij}^\beta e^{-\beta y_i}) \right] \cdot \exp(-m_i \cdot \tau_i^\beta e^{-\beta y_i}) \quad (10)$$

$$\ln L_i = \left[\sum_{j=1}^{r_i} \ln f_i(t_{ij}) \right] + (N_i - r_i) \ln [1 - F_i(\tau_i)] = \left\{ \sum_{j=1}^{r_i} [\ln \beta - \beta y_i + (\beta - 1) \ln t_{ij} - t_{ij}^\beta e^{-\beta y_i}] \right\} - m_i \tau_i^\beta e^{-\beta y_i} \quad (11)$$

其中, $m_i = N_i - r_i$, 为子试验终止时没有失效的样本数。准样本数据集的对数似然函数为

$$l = \sum_{i=1}^k \ln L_i = \sum_{i=1}^k \{ r_i [\ln \beta - \beta y_i] + (\beta - 1) \sum_{j=1}^{r_i} \ln t_{ij} - \sum_{j=1}^{r_i} (t_{ij}^\beta e^{-\beta y_i}) - m_i \tau_i^\beta e^{-\beta y_i} \} \quad (12)$$

对数似然函数的一、二阶偏导如下:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^k [r_i (1/\beta - y_i) + q_{1i} - e^{-\beta y_i} (q_{2i} + m_i \tau_i^\beta q_{11i})]$$

$$\frac{\partial l}{\partial Y_0} = \beta \cdot \sum_{i=1}^k [-r_i + e^{-\beta y_i} (q_{3i} + m_i \tau_i^\beta)]$$

$$\frac{\partial l}{\partial Y_1} = \sum_{i=1}^k \{ \xi_i [-\beta r_i + s_i q_{4i} (\beta - 1) + \beta e^{-\beta y_i} (q_{5i} + m_i \tau_i^{\beta-1} \tau'_i)] \}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} = - \sum_{i=1}^k [r_i/\beta^2 + e^{-\beta y_i} (q_{6i} + m_i \tau_i^\beta q_{11i})]$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial Y_0} = \sum_{i=1}^k \{ -r_i + e^{-\beta y_i} [q_{7i} + m_i \tau_i^\beta (\beta q_{11i} + 1)] \}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial Y_1} = \sum_{i=1}^k \{ \xi_i [-r_i + s_i q_{4i} + e^{-\beta y_i} (q_{8i} + m_i \tau_i^{\beta-1} \tau'_i (\beta q_{11i} + 1))] \}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial Y_0^2} = -\beta^2 \sum_{i=1}^k [e^{-\beta y_i} (q_{3i} + m_i \tau_i^\beta)]$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial Y_0 \partial Y_1} = -\beta^2 \sum_{i=1}^k [\xi_i e^{-\beta y_i} (q_{5i} + m_i \tau_i^{\beta-1} \tau'_i)]$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial Y_1^2} = \sum_{i=1}^k \{ \xi_i^2 [(\beta - 1) s_i q_{9i} - \beta e^{-\beta y_i} (q_{10i} + m_i \tau_i^{\beta-2} \tau'_i (\beta \tau_i - (\beta - 1) s_i))] \}$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } q_{1i} &= \sum_{j=1}^{r_i} (\ln t_{ij}); q_{2i} = \sum_{j=1}^{r_i} [t_{ij}^{\beta} (\ln t_{ij} - y_i)]; q_{3i} = \sum_{j=1}^{r_i} (t_{ij}^{\beta}); q_{4i} = \sum_{j=1}^{r_i} (1/t_{ij}); q_{5i} = \sum_{j=1}^{r_i} (t_{ij}^{\beta-1} t'_{ij}); q_{6i} \\ &= \sum_{j=1}^{r_i} [t_{ij}^{\beta} (\ln t_{ij} - y_i)^2]; q_{7i} = \sum_{j=1}^{r_i} \{t_{ij}^{\beta} [\beta (\ln t_{ij} - y_i) + 1]\}; q_{8i} = \sum_{j=1}^{r_i} \{t_{ij}^{\beta-1} t'_{ij} [\beta (\ln t_{ij} - y_i) + 1]\}; q_{9i} = \\ &\sum_{j=1}^{r_i} (t_{ij}^{-2} t'_{ij}); q_{10i} = \sum_{j=1}^{r_i} \{t_{ij}^{\beta-2} t'_{ij} [\beta t_{ij} - (\beta-1) s_i]\}; q_{11i} = \ln \tau_i - y_i. \end{aligned}$$

由对数似然函数的各阶偏导数,利用 Newton 迭代法对式(12)寻优,得到使 l 最大的 $(\beta, \gamma_0, \gamma_1)$,便可由式(3)得到使用应力下对数特征寿命的估计值。

4 统计分析方法对比

统计分析方法对比的思路是:将文献[3]中的统计分析结果作为先验信息,利用存在工作历程样本 ALT 试验数据的 Monte Carlo 仿真方法产生试验数据(见 4.1 节),用第 3 节介绍的两种方法分析仿真数据分别得到两种结果,最后比较这两种结果,得到关于这两种统计分析方法分析精度的结论。

4.1 存在工作历程样本 ALT 试验数据的 Monte Carlo 仿真方法

3.2 节指出存在工作历程的样本的恒定应力 ALT 实际上是由简单步进 ALT 子试验组成的复合应力 ALT。因此,对其每一个子试验,利用 Monte Carlo 方法必须产生简单步进试验数据。文献[5-7]中探讨了利用 Monte Carlo 仿真产生步进应力 ALT 试验数据的方法,这些方法实际上是等价的。

选取:(1)初始工作历程中样本的失效比例为 p_1 ;(2)到截尾时间为止没有失效的样本比例为 p_2 。要得到 Weibull 分布的随机样本,可首先产生 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数,然后对其进行概率积分变换。具体地说,对子试验 i ,首先产生 N_i 个在 $[0, 1]$ 上均匀分布且相互独立的随机数,将它们分为三组: $[0, p_1)$, $[p_1, 1-p_2)$, $[1-p_2, 1]$ 。落入 $[0, p_1)$ 的随机数对应初始工作历程中失效的样本的失效概率,落入 $[1-p_2, 1]$ 的随机数对应到截尾时间没有失效的样本的失效概率,而落入 $[p_1, 1-p_2)$ 的随机数则对应 ALT 中失效的样本的失效概率,然后将落入 $[p_1, 1-p_2)$ 的 r_i 个均匀分布随机数 $U_{i,j}(j=1, \dots, r_i)$ 变换为 Weibull 分布样本

$$Y_{i,j} = \alpha [-\ln(1-U_{i,j})]^{\beta} + t_0 - s_i \quad (13)$$

其中, α 为应力水平 ξ 下的特征寿命; $t_0 = F_0^{-1}(p_1)$; $F_i(s_i) = F_0(t_0)$, $s_i = t_0 \alpha / \alpha_0$ 。

用于统计分析的以试验开始时间作为计时起点的仿真试验数据为

$$t'_{ij} = Y_{ij} - t_0 \quad (14)$$

4.2 仿真方案

文献[3]对某微波电源晶体管恒定应力 ALT 数据^[8]进行统计分析得到加速模型及寿命分布参数。本文利用其加速模型及寿命分布参数的估计值作为先验信息,通过 4.1 节描述的方法得到仿真数据,用两种统计分析方法对其进行分析,得到使用应力下特征寿命,最终比较两种方法的效果。

ALT 方案为:应力水平数 $k=2$;应力水平 $x_0=100^\circ\text{C}$, $x_1=190^\circ\text{C}$, $x_2=215^\circ\text{C}$;子试验样本量 $N_1=19$, $N_2=10$; $p_1=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3]$; $p_2=[0.1 \ 0.2]$ 。模型参数估计值为:形状参数 $\beta=2.8161$;加速模型系数 $\gamma_0=10.8736$, $\gamma_1=-2.4815$ 。Monte Carlo 仿真参数:仿真次数 $M=100$;对比的标准: MSE。

由于均方误差(MSE: Mean Square Error)既能表征估计量的方差又能表征估计量对期望的偏差,因而将正常使用应力下特征寿命估计值的均方误差作为两统计分析方法效果对比的标准

$$MSE[\hat{y}_0] \approx \text{var}(\hat{y}_0) + [\hat{y}_0 - y_0]^2 \quad (15)$$

其中, $\hat{y}_0 = \ln \hat{\alpha}_0$ 。 $\text{var}(\hat{y}_0)$ 按 δ 方法计算,具体步骤如下:

(1) 计算加速模型及寿命分布参数的极大似然估计值 $\beta, \gamma_0, \gamma_1$, 然后计算局部 Fisher 信息矩阵:

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \gamma_0} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \gamma_1} \\ -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \partial \beta} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0^2} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \partial \gamma_1} \\ -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1 \partial \beta} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_0} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1^2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中, l 为对数似然函数, 矩阵各项为 l 的二阶偏导在 $\beta = \hat{\beta}$, $\gamma_0 = \hat{\gamma}_0$, $\gamma_1 = \hat{\gamma}_1$ 处的值。

(2) 计算协方差矩阵的局部估计值:

$$V = F^{-1} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}) & \text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_0) & \text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_1) \\ \text{cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\beta}) & \text{var}(\hat{\gamma}_0) & \text{cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) \\ \text{cov}(\hat{\gamma}_1, \hat{\beta}) & \text{cov}(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_0) & \text{var}(\hat{\gamma}_1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

由于使用应力下对数特征寿命的极大似然估计为

$$\hat{\gamma}_0 = \ln \alpha_0 = \gamma_0 + \gamma_1 \xi_0 \quad (18)$$

其中, ξ_0 为使用应力水平。令

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} & \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_0} & \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_1} \end{bmatrix}_{\beta = \hat{\beta}, \gamma_0 = \hat{\gamma}_0, \gamma_1 = \hat{\gamma}_1} \quad (19)$$

得

$$\text{var}(\hat{\gamma}_0) = H V H' \quad (20)$$

5 仿真结果及结论

两统计分析方法对仿真数据的统计分析结果如表 1 所示。其中 MSE_1 、 MSE_2 分别为忽略样本初始工作历程方法(方法 1)及基于初始工作时间折算方法(方法 2)所得结果的均方误差。结果表明:

表 1 两近似统计分析方法对比结果

Tab. 1 The result of comparison between two analytical method

	$p_1 = 0$		$p_1 = 0.1$		$p_1 = 0.2$		$p_1 = 0.3$	
	$p_2 = 0.1$	$p_2 = 0.2$	$p_2 = 0.1$	$p_2 = 0.2$	$p_2 = 0.1$	$p_2 = 0.2$	$p_2 = 0.1$	$p_2 = 0.2$
MSE_1	0.6906	0.7900	3.2331	5.9708	5.8237	9.7819	9.7375	10.5431
MSE_2	0.6906	0.7900	1.3870	2.0999	2.3653	3.6818	3.3922	5.3599

(1) 针对不同的 p_1, p_2 组合, 方法 2 的统计分析比方法 1 的统计分析精度高, 且 p_1, p_2 越大时, 两方法分析精度差别越大, 因此建议在实际应用时采用基于初始工作时间折算方法进行剩余寿命评估。

(2) 当 p_2 一定时, 两统计分析方法的 MSE 随着 p_1 增大而逐渐变大(估计精度下降), 但 MSE_2 的增速比 MSE_1 的增速慢, 说明方法 2 的统计分析精度受 p_1 的影响程度比方法 1 小。

(3) 当 p_1 一定时, 两统计分析方法的估计精度随 p_2 的增大而下降(MSE 变大), 说明截尾时间越短, 估计精度越差。这与理论分析结果是一致的: p_2 越大, 试验所得失效数据就越少, 统计分析可利用的失效信息就越少, 估计精度因而变差。

参考文献:

- [1] Zhao M, Xie M. A Model of Storage Reliability with Possible Initial Failures [J]. Reliability Engineering and System Safety, 1994, 43: 269-273.
- [2] 张春华, 温熙森, 陈循. 加速寿命试验技术综述[J]. 兵工学报, 2004, 25(4): 485-490.
- [3] Watkins A J. Review: Likelihood Method For Fitting Weibull Log-linear Models To Accelerated Life-test Data [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1994, 43(3): 361-365.
- [4] 张春华, 陈循, 杨拥民. 常见寿命分布下环境因子的研究[J]. 强度与环境, 2001(4): 7-12.
- [5] McSorley E O, Lu J C, Li C S. Performance of Parameter estimates in Step-stress Accelerated Life-test with Various Sample-sizes [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2002, 51(3): 271-277.
- [6] 张春华, 陈循, 温熙森. 步降应力加速寿命试验——方法篇[J]. 兵工学报, 2005, 26(5): 661-665.
- [7] 张春华, 陈循, 温熙森. 步降应力加速寿命试验——统计分析篇[J]. 兵工学报, 2005, 26(5): 666-669.
- [8] Nelson W. Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans and Data Analysis [M]. John Wiley & Sons, 1990.