文章编号: 1001- 2486(2008) 01- 0129- 04

一类新的优美树*

戴 丽, 王正华, 谢 政
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: Rosa 等人于 1966 年提出了著名的优美树猜想, 即任何树都是优美图。该猜想至今没有得到证明或否定, 仅有一些特殊树类被证明是优美图。通过构造路 $P_n = v_0v_1\cdots v_n$ 的平衡标号 f 使 $f(v_0) = k$, 其中 k 为任意不大于 n 的非负整数, 且 $4k \neq n, 3n$, 进而给出一种新的优美树的构造方法, 使已知的优美树大大增加。

关键词: 优美图; 顶点标号; 平衡标号; 路
中图分类号: O157.5 文献标识码: A

Another Gracefull Trees

DAI Li, WANG Zheng-hua, XIE Zheng
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In 1966, Rosa conjectured that all trees are graceful, which has ever since been considered the famous Graceful Tree Conjecture (GTC). Now the conjecture still remains to be an open problem, and only a few kinds of trees are proved to be graceful. The number, however, can be enlarged by the approach presented in the paper. For any integer $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ and $4k \neq n, 3n$, there exists a bipartited labeling f of path $P_n = v_0v_1\cdots v_n$ such that $f(v_0) = k$. Based on this, a method for constructing bigger graceful trees by joining a path to a graceful tree is given and this makes much more trees to be graceful.

Key words: graceful graph; vertex labeling; balanced labeling; path

1966 年, Rosa 猜想[1]: 所有的树都是优美图。这就是著名的优美树猜想。目前, 国内外已获得许多关于优美图的研究成果[2], 它们被广泛应用于射电天文学、X- 射线衍射晶体学、密码设计、导弹控制码设计、同步机码设计等领域。但优美树猜想至今仍没有得到证明或否定, 甚至对一些简单的树, 该猜想是否成立也是尚待解决的难题。对于优美树猜想的证明主要有两个方面的研究内容, 一方面是证明某些特殊的树是优美的, 如人们已经证明以下这些树是优美的[2]: 路、毛虫树[3-4]、花树、对称树、橄榄树、最多有 4 个悬挂点的树[5]、直径最多为 5 的树[6]、最多有 27 个顶点的树等; 另一方面, 就是研究如何构造优美树, 如 Burzio 和 Ferrarese 证明了剖分优美树的每条边得到的树仍然是优美树[7]、Morgan 和 Rees 等人则采用 Skolm 序列和 Hooked Skolem 序列[8-9]来构造优美树等。本文通过给出路的特殊优美标号, 一方面证明了只有一个顶点的度为 3, 其余顶点的度均小于 3 的树是优美树; 另一方面, 证明了给优美树粘上一条足够长的路可以构造新的优美树类。

1972 年, Golomb 明确给出了优美图的如下定义[10]。对于一个给定的简单图 $G = (V, E)$, 如果对每一个 $v \in V$, 存在一个非负整数 $f(v)$ (称为顶点 v 的标号), 满足下述三个条件:

(1) 对任意的 $v_1, v_2 \in V$, 如果 $v_1 \neq v_2$, 则 $f(v_1) \neq f(v_2)$;

(2) $\max\{f(v) \mid v \in V\} = |E|$;

(3) 对任意的 $e_1, e_2 \in E$, 如果 $e_1 \neq e_2$, 则 $g(e_1) \neq g(e_2)$, 其中 g 称为边导出标号, 且 $g(e) = |f(v_1) - f(v_2)|$, $(\forall e = v_1v_2)$。

则 f 称为 G 的一个优美标号(graceful labeling), G 称为优美图(graceful graph)。

* 收稿日期: 2007- 07- 08
作者简介: 戴丽(1974—), 女, 讲师, 在职博士生。

1 平衡标号

设 f 为 G 的一个优美标号, 如果存在一个正整数 k, 使得对任意的 $uv \in E(G)$ 有

$$f(u) > k \geqslant f(v) \text{ 或 } f(u) \leqslant k < f(v)$$

成立, 则称 f 为 G 的平衡标号(或称 G 有平衡标号 f), 且称 k 为 f 的特征[4]。显然, 若 f 是 G 的平衡标号, 则 k 是边导出标号为 1 的边的两个端点中标号较小的顶点的标号。

下面介绍本文将用到的三种重要的优美标号。设 G 为任意一个有 n 条边的简单图。

设 f 为 G 的一个优美标号, 则 $n-f$ 也是 G 的优美标号, 称此标号为 f 的补充标号, 记作 f; 若 f 为 G 的一个平衡标号, 且特征为 k, 则 $k-f(\mathrm{mod}\, n+1)$ 也是 G 的平衡标号, 称此标号为 f 的逆转标号, 记作 f。由上述补充标号和逆转标号的定义可知, 若记 f 为逆转标号 f 的补充标号, 则 f 是特征为 $n-k-1$ 的平衡标号, 称之为 f 的补充逆转标号。

2 路的平衡标号

设 $P_n = v_0 v_1 \cdots v_n$ 是长为 n 的路。任何一个长为 n 的路都有平衡标号[4]。我们将证明: 对任意 $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ 且 $k \neq n/4, 3n/4$, 都存在路 P_n 的平衡标号 f, 使得 $f(v_0) = k$。

定理 1 设 $n = 2m+1$, 则对任意 $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, 都存在路 $P_n = v_0 v_1 \cdots v_n$ 的一个平衡标号 f, 使得 $f(v_0) = k$。

证明 考虑到补充标号, 不妨设 $k \leqslant m$。

不失一般性, 我们还可以设 $k \leqslant \frac{m-1}{2}$。事实上, 如果 $k > \frac{m-1}{2}$, 则有 $m-k \leqslant \frac{m}{2}$, 而当 $m-k \leqslant \frac{m-1}{2}$ 时, 考虑逆转标号即可; 当 $m-k = \frac{m}{2}$ 时, 此时 m 必然为偶数, 设 $m = 2l$, 于是 $k = \frac{m}{2} = l$, 我们给出路 P_n 如下平衡标号:

$$f(v_i) = \begin{cases} l+j, & i = 2j \text{ and } 0 \leqslant j \leqslant l; \\ 3l-j, & i = 2j+1 \text{ and } 0 \leqslant j \leqslant l-1; \\ 4l+1-j, & i = 2l+(2j+1) \text{ and } 0 \leqslant j \leqslant l; \\ j-1, & i = 2l+2j \text{ and } 1 \leqslant j \leqslant l. \end{cases}$$

下面用数学归纳法证明。

对于长为 1 的路, 结论显然成立。假设对于所有长度为奇数且小于 n 的路结论成立, 则对于长为 $n = 2m+1$ 的路 P_n, 首先由归纳假设, 路 P_n 的 $\left(v_{2k+2}, v_n\right)$ 节有平衡标号 f_1, 使得 $f(v_{2k+2}) = k$。于是可构造 P_n 的平衡标号 f 为

$$f(v_i) = \begin{cases} k-j, & i = 2j \text{ and } 0 \leqslant j \leqslant k; \\ n-k+j, & i = 2j+1 \text{ and } 0 \leqslant j \leqslant k; \\ f_1(v_i)+(k+1), & 2k+2 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

定理 2 设 $n = 2m$, $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, 且 $k \neq n/4, 3n/4$, 则存在路 $P_n = v_0 v_1 \cdots v_n$ 的一个平衡标号 f, 使得 $f(v_0) = k$。

证明 考虑到补充标号, 不妨设 $k \leqslant m$。下面分两种情形证明。

情形 1 $k \leqslant \frac{m-1}{2}$。

首先, 注意到 P_n 的 $\left(v_{2k+1}, v_n\right)$ 节的长为奇数, 故由定理 1 知 $\left(v_{2k+1}, v_n\right)$ 节有平衡标号 g_1, 使 $g_1(v_{2k+1}) = k$。于是, 构造 P_n 的标号 g, 使 $g(v_0) = n-k$ 如下:

$$g(v_i) = \begin{cases} n-k+j, & i = 2j \text{ and } 0 \leqslant j \leqslant k; \\ k-1-j, & i = 2j+1 \text{ and } 0 \leqslant j \leqslant k-1; \\ g_1(v_i)+k, & 2k+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

则 g 是路 P_n 的平衡标号且特征为 $m-1$。设路 P_n 的平衡标号 f 为 g 的补充标号, 则 $f(v_0)=k$ 且其特征为 m。

情形 2　$k\geqslant\frac{m+1}{2}$。

P_n 的 $(v_{2(m-k)+1}, v_n)$ 节的长为奇数, 故有平衡标号 h_1, 使 $h_1(v_{2(m-k)+1})=m-k$。构造 P_n 的标号 h, 使 $h(v_0)=m+k$ 如下:

$$h(v_i)=\begin{cases} m+k+j, & i=2j \text{ and } 0\leqslant j\leqslant m-k; \\ m-k-1-j, & i=2j+1 \text{ and } 0\leqslant j\leqslant m-k-1; \\ h_1(v_i)+(m-k), & 2(m-k)+1\leqslant i\leqslant n. \end{cases}$$

则 h 是路 P_n 的平衡标号且特征为 $m-1$。设 P_n 的平衡标号 f 为 h 的补充逆转标号, 则 $f(v_0)=k$ 且其特征为 m。

推论 1　设路 $P_n=v_0v_1\cdots v_n$, 则可给它的任意顶点标号为 n 而得到相应的优美标号。

证明　设 $n_1+n_2=n$, 给第 n_1+1 个顶点 v_{n_1} 标号 n, 即证 P_n 有优美标号 f, 使 $f(v_{n_1})=n$。不妨设 $n_1\leqslant n_2$ (否则考虑反向标号, 即以 v_n 为起点, v_0 为终点)。

首先给路 $P_n=v_0v_1\cdots v_n=v_0v_1\cdots v_{n_1}v_{n_1+1}v_{n_1+2}\cdots v_{n_1+n_2}$ 的 (v_0, v_{n_1}) 节标号 f_1, 其中

$$f_1(v_{n_1-i})=\begin{cases} n-j, & i=2j \text{ and } 0\leqslant i\leqslant n_1; \\ j, & i=2j+1 \text{ and } 0\leqslant i\leqslant n_1. \end{cases}$$

注意到 $n_1\leqslant n_2$, 故 $0\leqslant n_1-\left(1+\left\lfloor\frac{n_1-1}{2}\right\rfloor\right)\leqslant n_2-1$, 由定理 1, 2 知, 路 P_n 的 $(v_{n_1+1}, v_{n_1+n_2})$ 节有平衡标号 f_2, 使 $f_2(v_{n_1+1})=n_1-\left(1+\left\lfloor\frac{n_1-1}{2}\right\rfloor\right)$。构造路 P_n 的标号 f 为

$$f(v_i)=\begin{cases} f_1(v_i), & 0\leqslant i\leqslant n_1; \\ f_2(v_i)+\left(1+\left\lfloor\frac{n_1-1}{2}\right\rfloor\right), & n_1+1\leqslant i\leqslant n. \end{cases}$$

则 f 为优美标号且 $f(v_{n_1})=n$。

3　最大度为 3 的树的优美性

最大度为 3 的树(如二叉树等) 应用非常广泛, 它在图论的理论研究中也起着重要作用。图 1 给出的树就是一个最大度为 3 的树。

定理 3　恰有一个顶点的度为 3, 其余顶点的度均小于 3 的树是优美图。

证明　设 T 的结构如图 1 所示。设 $n_1\leqslant n_2\leqslant n_3$. 由推论 1 知 (u_{n_2}, v_{n_1}) 路有优美标号 f_1 使 x_0 的标号最大, 即 $f_1(x_0)=n_1+n_2$。注意到给优美图的标号最大的顶点粘上一个悬挂点得到的图仍是优美图 (此时可以给新添加的悬挂点标号为 0, 而把原来的顶点标号全部加 1 而得到新图的优美标号) ; 给标号为 0 的顶点粘上一个悬挂点得到的图也仍为优美图(此时可以保持原来的顶点标号不动, 而将新增加的顶点标号为 $n+1$) , 从而结论成立。

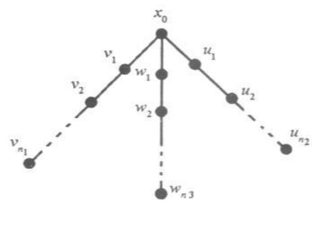

图 1　最大度为 3 的树

Fig. 1　Trees with exactly one vertex of maximum degree 3

4　一类新的优美树

设 T 为树, u 为树 T 上的任意顶点, 在树 T 与路 $P_n=v_0v_1\cdots v_n$ 间添加一条边 uv_0 而得到的树称为给顶点 u 粘上路 P_n。

定理 4　设 T 为有 l 条边的优美树, g 为它的优美标号, 给它的任一顶点 u 粘上长为 n 的路 $P_n=$

$v_0v_1\cdots v_n$ 而得到的树记作 T^*. 如果 $g(u)\leqslant\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 且 $n\neq0(\mathrm{mod}4)$, 则树 T^* 仍是优美图。

证明　由 $g(u)\leqslant\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 知 $g(u)+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1\leqslant n$, 并且由于 $n\neq0(\mathrm{mod}4)$, 知此时 $\frac{3n}{4}$ 不是整数, 故 $g(u)+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1\neq\frac{3n}{4}$. 从而由定理 1, 2 可构造路 P_n 的平衡标号 f_1 使

$$f_1(v_0)=g(u)+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1$$

注意到 $g(u)+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1\geqslant\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, 故平衡标号 f_1 的特征为 $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, 于是, 设树 T 的标号 f 为

$$f(z)=\begin{cases}g(z)+\left(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1\right), & z\in V(T);\\ f_1(z)+\left(l+1\right), & z\in V(P)\ \text{and}\ f_1(z)>\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor;\\ f_1(z), & z\in V(P)\ \text{and}\ f_1(z)\leqslant\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor.\end{cases}$$

则 f 为树 T 的优美标号。

推论 2　设 T 为有 l 条边的优美树, 路 $P_n=v_0v_1\cdots v_n$ 的长度大于 $l+1$ 且满足 $n\neq0(\mathrm{mod}4)$, 则给它的任一顶点粘上路 $P_n=v_0v_1\cdots v_n$ 而得到的树仍是优美树。

利用定理 4 和推论 2 可以构造新的优美树类, 使已知的优美树大大增加, 但这类优美树的构造要求粘上路的长度比较长(大于 $l+1$) 且不为 $4k$。因此, 以下两方面是值得进一步研究的重要内容:

(1) 粘上的路的长度小于等于 $l+1$ 时, 新树的优美标号应如何构造;

(2) $g(u)+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1=\frac{3n}{4}$ 时, 新树的优美标号应如何构造。

参 考 文 献:

[1] Rosa A. On Certain Valuations of the Vertices of a Graph [M]. Theory of Graphs, Proc. Internet, Sympos, Rome. 1966, 349- 355.

[2] Gallian J A. A Dynamic Survey of Graph Labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2007.

[3] Rosa A. On Certain Valuations of the Vertices of a Graph [J]. Theory of Graphs, 1967, 349- 355.

[4] 马克杰. 优美图[M]. 北京大学出版社, 1991.

[5] Huang C, Kotzig A, Rosa A. Further Results on Tree Labelings[J]. Utilitas Math, 1982, 31- 48.

[6] Hrnciar P, Haviar A. All Trees of Diameter Five are Graceful[J]. Discrete Math, 2001, 133- 150.

[7] Burzio M, Ferrarese. The Subdivision Graph of a Graceful Tree is a Graceful Tree[J]. Discrete Mathematics. 1998, 181: 275- 281.

[8] Morgan D, Reea R. Using Skolem and Hooked-skolem Sequences to Generate Graceful Trees[J]. J. Combin. Math. Combin. Comput., 2003, 44: 47- 63.

[9] Morgen D. Gracefully Labelled Trees from Skolem and Related Sequences[D]. Master degree thesis, University of Newfoundland, 2001.

[10] Golomb S W. How to Number a Graph [M]. Graph theory and Computing, Academic Press, New York, 1972, 23- 37.