

文章编号: 1001- 2486(2008) 02- 0072- 06

## 基于雷达波束篱笆的空间碎片数量的置信区间估计\*

宋正鑫, 胡卫东, 陶勇, 郁文贤

(国防科技大学 ATR 实验室, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 针对雷达波束篱笆空间碎片探测模式, 提出了一种估计碎片数量置信区间的方法。对于给定的轨道高度范围, 将轨道倾角和雷达散射截面足够大的碎片是否真正穿越波束篱笆这一事件用(0-1)分布来建模, 根据所获取的轨道高度数据, 得到该轨道高度范围内碎片穿越波束篱笆的平均概率, 进而采用中心极限定理估计出该范围内碎片总数量的置信区间。仿真实验验证了方法的有效性。

**关键词:** 航天器环境; 空间碎片数量; 统计采样; 雷达波束篱笆

**中图分类号:** V488; TN959.7 **文献标识码:** A

## Estimation of the Confidence Interval for Space Debris Population Based on Radar Beam Fence

SONG Zheng-xin, HU Wei-dong, TAO Yong, YU Wen-xian

(ATR Lab., National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A method of estimating the confidence interval for debris population using radar beam fence is described. Whether a debris object may cross the beam fence, that is, whether a debris has large enough inclination and radar cross section or not, is actually detected and modeled as a (0-1) distribution. Using debris altitude data collected, the average probability of crossing the beam fence is obtained. The confidence interval for debris population is estimated by the Central Limitation Theorem. The validity of the method is verified by simulation.

**Key words:** spacecraft environment; space debris population; statistical characterization; radar beam fence

随着航天技术的发展而数量激增的空间碎片的危害已引起广泛关注。对于大尺寸碎片(低轨直径超过约 10cm 的碎片以及高轨直径超过约 1m 的碎片), 可采用传感器网进行例行的跟踪与编目; 而对于小尺寸碎片, 由于难以定期跟踪, 只能依赖空间碎片的统计采样技术, 即通过在有限时长有限轨道区域内获取的碎片数据(称“空间碎片的采样”)来推求碎片总体的统计信息。碎片数量估计是空间碎片统计采样的一个重要内容, 还能用于验证空间碎片环境模型。此外, 分析卫星的碰撞风险和估计碎片数量的增长趋势, 也需要获取在轨碎片的数量信息。已有空间碎片统计采样的实现途径包括: 在轨原位探测(包括分析从太空返回的航天器表面和利用在轨碰撞探测器)<sup>[1]</sup>、光学望远镜的“凝视”模式<sup>[2-3]</sup>、窄波束雷达的波束驻留(Beam-park)模式<sup>[4-5]</sup>。

雷达波束篱笆是进行空间碎片“普测”的一种重要手段, 目前实用的系统有美国的海军空间监视电子篱笆 NAVSPASUR 和法国的 GRAVES 雷达。由于二者均为连续波体制, 且均工作在 VHF 波段, 因而对小尺寸碎片的探测能力有限, 主要用于大尺寸碎片的编目。除了能对多目标进行跟踪, 在雷达资源允许的前提下, 相控阵雷达还可发射特定信号形式的脉冲构成波束篱笆<sup>[6]</sup>。载人航天、空间站等航天活动对小尺寸碎片的观测提出了迫切需求, 利用高频段(S、X 波段等)的雷达波束篱笆进行碎片探测不失为一种好的解决方式。本文将针对雷达波束篱笆这一碎片探测手段, 根据所获取的轨道高度数据, 采用统计学原理研究估计碎片数量置信区间的方法, 为空间碎片(尤其是小尺寸碎片)的统计采样提供一种新的实现途径。

\* 收稿日期: 2007-09-14

基金项目: 国家 863 高技术资助项目(2003AA134030; 2005AA 736050)

作者简介: 宋正鑫(1978-), 男, 博士生。

## 1 问题与假设

不妨设测站位于北半球,所处经度为 0, 纬度为  $\theta$ , 通过发射扇形波束或利用笔形波束的扫描构成雷达波束篱笆(见图 1), 波束篱笆相对于其中心线的扫描角范围为  $\pm \varphi/2$ , 忽略波束篱笆的“厚度”。对某轨道区域而言, 这一区域内的所有碎片中真正穿越波束篱笆者是对该区域碎片总体的一个采样。本文研究的问题是: 根据一段时间内(一般大于 24h) 雷达波束篱笆所检测到的某轨道高度范围内空间碎片的采样数据, 即穿越波束篱笆碎片的轨道高度数据, 估计该范围内碎片总数量的置信区间。为此, 作如下假设:

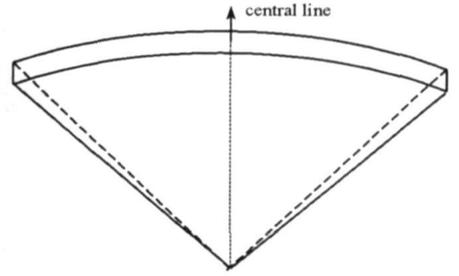


图 1 雷达波束篱笆示意图

Fig. 1 The diagram of the radar beam fence

(1) 对于穿越波束篱笆的碎片, 只要其 RCS (Radar Cross Section) 大于某一值(由雷达的探测能力决定), 则该碎片就可被检测到;

(2) 所有碎片都运行在圆轨道上;

(3) 碎片的升交点赤经和平纬度角(近地点幅角与平近点角之和)在  $[0^\circ, 360^\circ]$  区间均匀分布;

(4) 对于给定轨道高度范围内一个具有穿越波束篱笆可能性的碎片(即轨道倾角和 RCS 足够大), 其是否真正穿越波束篱笆可用(0-1)分布来描述。

采用假设(1)是为了简化所讨论的问题, 此时是对所有尺寸在雷达波束篱笆检测能力范围内的目标数量作估计; 若可获取所有穿越波束篱笆目标的 RCS 数据, 还可限定仅对某一尺寸范围目标数量的置信区间作估计。采用假设(2)、(3)的原因是, 在雷达波束篱笆碎片探测模式下, 利用一个观测弧段得不到目标精确的轨道偏心率以及升交点赤经、近地点幅角、平近点角, 只能获取轨道高度和倾角数据。假设(2)、(3)的合理性已在空间碎片环境建模与验模的过程中得到证实<sup>[7]</sup>。对于多个具有相同轨道高度和倾角的碎片, 其穿越波束篱笆的概率相等(由假设(2)、(3)保证)。进一步地, 为简化所讨论的问题, 对于给定的轨道高度范围, 可认为所有碎片具有相等的平均穿越概率(即假设(4)中(0-1)分布的参数), 这一概率由所有穿越波束篱笆的碎片进行平均得到。

## 2 碎片数量置信区间估计算法

### 2.1 算法原理

由于空间碎片的相对稀疏性, 各碎片到达波束篱笆的过程可认为相互独立。对于给定的轨道高度范围, 其中可能被波束篱笆检测到的碎片总数目用  $N$  表示。一个具有穿越波束篱笆可能性的碎片(即轨道倾角和 RCS 足够大)是否真正穿越波束篱笆可用一个随机变量  $X_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) 来描述, 则  $X_i$  服从(0-1)分布(假设(4)), 其均值和方差分别为:  $E(X_i) = p$ ,  $\text{Var}(X_i) = p(1-p)$ 。其中,  $p$  为给定轨道高度范围内碎片穿越波束篱笆的平均概率。当该范围内碎片数量较多时, 由中心极限定理, 得

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i - E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)}{\sqrt{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \quad (1)$$

可用标准正态分布来近似。其中,  $\sum_{i=1}^N X_i$  即观测时段内穿越波束篱笆的碎片总数目  $M$ 。采用区间估计的方法可求得在给定轨道高度范围内碎片总数目  $N$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间  $(B_1, B_2)$ 。其中

$$B_1 = \frac{[2M + z_{\alpha/2}^2(1-p)] - \sqrt{[z_{\alpha/2}^2(1-p)]^2 + 4z_{\alpha/2}^2(1-p)M}}{2p} \quad (2)$$

$$B_2 = \frac{[2M + z_{\alpha/2}^2(1-p)] + \sqrt{[z_{\alpha/2}^2(1-p)]^2 + 4z_{\alpha/2}^2(1-p)M}}{2p} \quad (3)$$



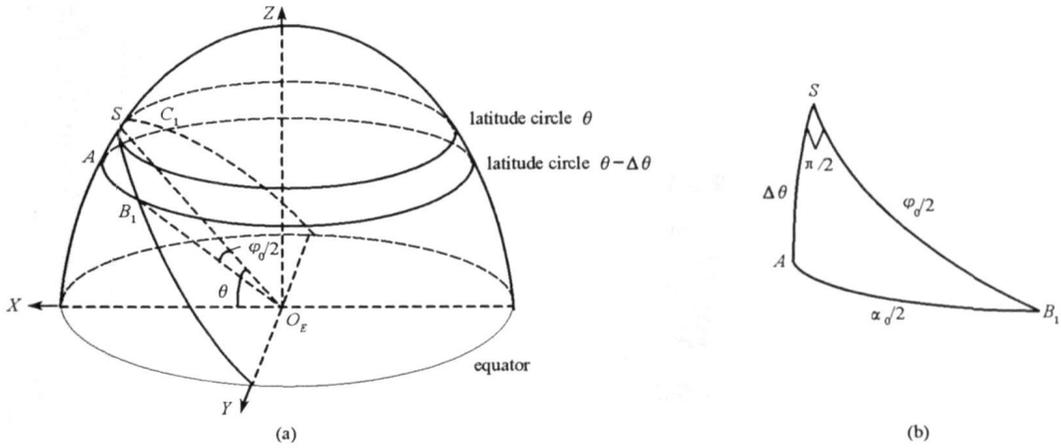


图 3 天顶指向的雷达波束篱笆几何关系图

Fig. 3 Geometry of a vertical radar beam fence

面的投影所成平面和波束篱笆所在平面垂直)

如图 4, 设波束篱笆中心线在站心地平坐标系中的方位角为  $\eta$  ( $\eta = \pi$  对应正南方), 波束篱笆两端的边界线在站心地平坐标系中的方位角分别为  $\eta_-$  ( $\varphi/2$ ),  $\eta_+$  ( $\varphi/2$ ), 则由图 4(b) 易知两端边界线的仰角相等 (均为  $\gamma$ , 图中平面  $SB_0C_0$  为测站当地水平面), 满足

$$\sin \gamma = \sin \gamma_0 \cos \left( \varphi/2 \right) \tag{12}$$

由矢量夹角公式易得

$$\cos^2 \gamma \cos \varphi + \sin^2 \gamma = \cos \varphi \tag{13}$$

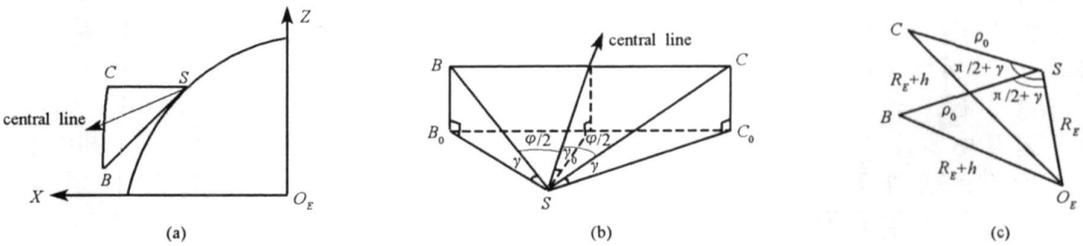


图 4 倾斜的雷达波束篱笆几何关系图

Fig. 4 Geometry of a non-vertical radar beam fence

如图 4(c),  $B, C$  到  $S$  的距离相等, 均为

$$\rho_0 = \sqrt{\left( R_E + h \right)^2 - R_E^2 \cos^2 \gamma} - R_E \sin \gamma \tag{14}$$

则  $B$  在站心地平坐标系中的坐标为  $\left[ \rho_0 \cos \gamma \cos \left( \eta_- - \frac{\varphi}{2} \right), \rho_0 \cos \gamma \sin \left( \eta_- - \frac{\varphi}{2} \right), \rho_0 \sin \gamma \right]$ 。进而, 由坐标变换得, 点  $B$  在坐标系  $O_E XYZ$  中的坐标为 (坐标系  $O_E XYZ$  的定义同图 3(a))

$$X_B = - \rho_0 \cos \gamma \cos \left( \eta_- - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \theta + \rho_0 \sin \gamma \cos \theta + R_E \cos \theta \tag{15}$$

$$Y_B = \rho_0 \cos \gamma \sin \left( \eta_- - \frac{\varphi}{2} \right) \tag{16}$$

$$Z_B = \rho_0 \cos \gamma \cos \left( \eta_- - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \theta + \rho_0 \sin \gamma \sin \theta + R_E \sin \theta \tag{17}$$

于是

$$\tan \alpha_B = \frac{Y_B}{X_B} = \frac{\rho_0 \cos \gamma \sin \left( \eta_- - \frac{\varphi}{2} \right)}{- \rho_0 \cos \gamma \cos \left( \eta_- - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \theta + \rho_0 \sin \gamma \cos \theta + R_E \cos \theta} \tag{18}$$

同理

$$\tan \alpha_c = \frac{Y_c}{X_c} = \frac{\rho_0 \cos \gamma \sin \left( \eta + \frac{\phi}{2} \right)}{-\rho_0 \cos \gamma \cos \left( \eta + \frac{\phi}{2} \right) \sin \theta + \rho_0 \sin \gamma \cos \theta + R_E \cos \theta} \quad (19)$$

其中,  $\alpha_B$ 、 $\alpha_C$  分别为  $B$ 、 $C$  对应的经度。令  $\xi = \tan(\alpha_B - \alpha_C)$ , 则

$$\xi = \left( \tan \alpha_B - \tan \alpha_C \right) / \left( 1 + \tan \alpha_B \tan \alpha_C \right) \quad (20)$$

$$\alpha_c = \begin{cases} \arctan \xi, & \xi \geq 0 \\ \pi + \arctan \xi, & \xi < 0 \end{cases} \quad (21)$$

式(21)即倾斜的雷达波束篱笆对应的赤经覆盖范围。

综上,对某轨道高度范围,估计该范围内碎片数量置信区间的具体步骤为:

(1) 根据获取的轨道高度数据,对每个穿越波束篱笆的碎片计算其穿越概率  $p$  (对于天顶指向的和倾斜的波束篱笆,分别采用相应的公式进行计算);

(2) 对该轨道高度范围内所有穿越波束篱笆的碎片的穿越概率  $p$  求均值,并求得该范围内穿越波束篱笆的碎片数量  $M$ ;

(3) 对于给定的置信度  $1 - \alpha$ ,由(2)、(3)式求该轨道高度范围内碎片数量的置信区间  $[B_1, B_2]$ 。

### 3 仿真分析

根据 NORAD (North American Air Defense Command) 2007年4月9日发布的 10 248 个目标的双行根数,利用中国科学院紫金山天文台提供的轨道确定与预测软件,仿真了以下几种雷达波束篱笆碎片探测模式:天顶指向;波束篱笆中心线指向正南  $70^\circ$  仰角;波束篱笆中心线的方位角为南偏西  $12^\circ$ ,仰角为  $70^\circ$ 。仿真条件为:仿真起止时间 2007年4月8日零时—2007年4月9日零时(文中所有的时间均为协调世界时);测站纬度  $25.19^\circ\text{N}$ ;测站经度  $112.98^\circ\text{E}$ ;测站海拔高度 0;波束篱笆所覆盖的轨道高度范围 400~1400 km;波束篱笆角度覆盖范围  $12^\circ$  (扫描角度范围),  $0.1^\circ$  (“厚度”)。

仿真时假设所有目标的 RCS 都在雷达的探测能力范围内。采用本文的方法得到 400~1400 km 轨道高度范围内(步长为 50 km)目标数量的置信区间(置信度为 99.74%),并与 NORAD 数据相应轨道高度范围的目标数量进行了比较。由图 5 知,NORAD 数据各轨道高度范围的目标数量完全由置信区间的上下限所包含。这验证了算法中所作假定和近似的合理性,也证实了算法的有效性。

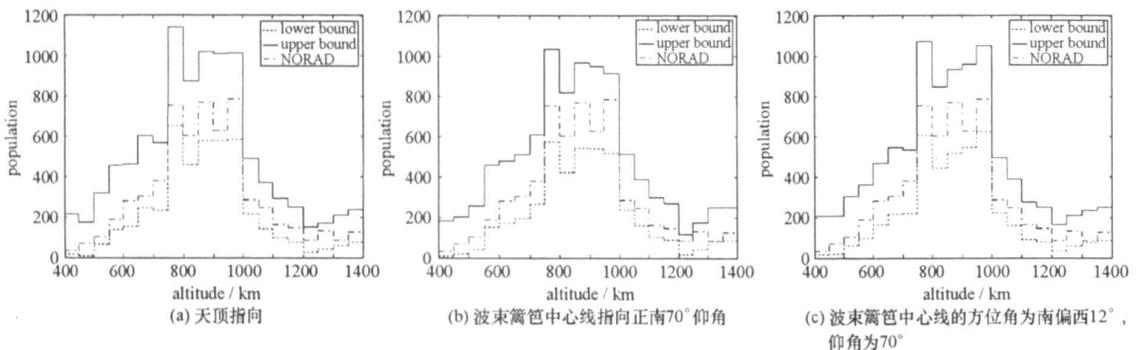


图 5 雷达波束篱笆模式下空间目标数量的置信区间

Fig. 5 Estimated confidence interval for space object population based on radar beam fence

为分析所估计碎片数量的置信区间随观测时长的变化,采用同样的仿真条件,针对 NORAD 数据中 950~1000 km 轨道高度范围内(其他轨道高度范围有类似的结果)的 785 个目标,仿真了天顶指向的雷达波束篱笆碎片探测模式。采用文中方法估计的不同观测时长对应的目标数量置信区间如表 1 所示。表 1 中,“相对不确定度”定义为区间长度与区间中点之比(百分数)。由表 1 可知,随着观测时长的增加,穿越波束篱笆的目标数目增多,所估计出的目标数量的置信区间的长度逐渐变短,相对不确定度逐

渐变小, 即增加观测时长将有利于缩小目标数量估计的不确定度。

表 1 估计出的空间目标数量的置信区间随观测时长的变化  
(起始时间为 2007 年 4 月 8 日零时, 所考虑的轨道高度范围为 950~ 1000km, 置信度为 99.74%)

Tab.1 Estimated confidence interval for space object population change with observation time duration  
(start time: 8 Apr. 2007 00 00 00.00; altitude: 950~ 1000 km; confidence: 99.74%)

| 序号          | 观测终止时间            | 穿越篱笆的目标数 | 区间下限 | 区间上限 | 区间中点 | 区间长度 | 相对不确定度 |
|-------------|-------------------|----------|------|------|------|------|--------|
| 1           | 2007 年 4 月 9 日零时  | 104      | 586  | 1011 | 799  | 425  | 53.19% |
| 2           | 2007 年 4 月 10 日零时 | 203      | 628  | 899  | 764  | 271  | 35.47% |
| 3           | 2007 年 4 月 11 日零时 | 314      | 680  | 883  | 782  | 203  | 25.96% |
| 4           | 2007 年 4 月 12 日零时 | 412      | 690  | 843  | 767  | 153  | 19.95% |
| 5           | 2007 年 4 月 13 日零时 | 513      | 704  | 819  | 762  | 115  | 15.09% |
| 6           | 2007 年 4 月 14 日零时 | 609      | 712  | 792  | 752  | 80   | 10.64% |
| NORAD 目标数量: |                   |          | 785  |      |      |      |        |

## 4 结论

针对雷达波束篱笆空间碎片探测模式, 根据获取的“空间碎片的采样”信息, 采用统计学原理研究了估计碎片数量置信区间的方法。该方法不依赖于空间碎片的先验信息(如空间目标编目库或空间碎片环境模型), 仅利用了穿越雷达波束篱笆碎片的轨道高度数据。仿真实验结果表明, 估计出的目标数量置信区间与空间目标的实际数目具有良好的一致性; 随着观测时长的增加, 置信区间的长度变小, 即所估计出的目标总数量的不确定度减小。

致谢: 感谢中国科学院紫金山天文台提供轨道确定与预测软件。

## 参考文献:

- [1] Zook H A, McKay D S, Bernhard R P. Results from Returned Spacecraft Surfaces[C]//Potter A. Orbital Debris: Technical Issues and Future Directions, 1990 AIAA/NASA/DOD Orbital Debris Conference. Houston: NASA Lyndon B. Johnson Space Center, 1992: 294- 299.
- [2] Matney M J, Stansbery E, Africano J, et al. Extracting GEO Orbit Populations from Optical Surveys[J]. Advances in Space Research, 2004, 34(5): 1160- 1165.
- [3] Jehn R, Ariafar S, Schildknecht T, et al. Estimating the Number of Debris in the Geostationary Ring[J]. Acta Astronautica, 2006, 59(1- 5): 84- 90.
- [4] Alfriend K T, Lewis D L. Estimation of the Low Earth Orbit Debris Population and Distribution[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1994, 31(1): 48- 53.
- [5] Alfriend K T, Lewis D L. Estimation of the Low Earth Orbit Debris Population Using a Non-vertical Staring Radar[J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 1996, 44(1): 99- 113.
- [6] Settecerri T J, Skillicom A D, Spikes P C. Analysis of the Egl in Radar Debris Fence[J]. Acta Astronautica, 2003, 54(3): 203- 213.
- [7] Liou J C, Matney M J, Anzmeador, et al. The New NASA Orbital Debris Engineering Model ORDEM2000[R]. NASA/TP- 2002- 210780, 2002.