文章编号: 1001- 2486(2008)02- 0135- 04

关于半鞅向量随机积分的两个结果*

屈田兴, 金治明
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘　要: 首先利用半鞅 Girsanov 定理与闭图像定理证明了: 若 $\{X_n\}$ 是带滤基的完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, F, \boldsymbol{P})$ 中的一列半鞅, 其中滤基 $F=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 满足通常条件, 且 $\{X_n\}$ 在关于 $\boldsymbol{P}$ 的 Emery 拓扑空间中收敛于 X, 则当概率测度 $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$ 时, $\{X_n\}$ 在关于 Q 的 Emery 拓扑空间中也收敛于 X。在此基础上又证明了: 若 X 是关于 $\boldsymbol{P}$ 的 d 维半鞅, d 维可料过程 H 关于 $\boldsymbol{P}$ 在半鞅向量随机积分的意义下对 X 可积, 则当概率测度 $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$ 时, H 关于 Q 在半鞅向量随机积分的意义下也对 X 可积, 并且两种积分是 Q- 无区别的。由于 $Q\ll\boldsymbol{P}$ 强于 $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$, 故本文推广了文献[1]中的引理 4.9 与定理 4.14。

关键词: 半鞅; 向量随机积分; 概率测度的局部连续性; 可料过程
中图分类号: O211.6　　文献标识码: A

Two Results about the Vector Stochastic Integrals with Respect to Semimartingales

QU Tian-xing, JIN Zhi-ming
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Let $\{X_n\}$ be a sequence of semimartingale in a filtered complete probability space $(\Omega, \mathscr{F}, F, \boldsymbol{P})$ satisfying the usual condition. We use the general Girsanov thorem and closed graph theorem to prove that the sequence $\{X_n\}$ converges on X in the Emery topology w.r.t Q if $\{X_n\}$ converges on X in the Emery topology w.r.t $\boldsymbol{P}$ and the probability measure $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$. In light of this fact, we prove that if X is a d-dimensional semimartingale and a d-dimensional predictable process, H is X-integrable in the sense of vector stochastic integrals w.r.t $\boldsymbol{P}$, when the probability measure $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$, H is also X-integrable in the sense of vector stochastic integrals w.r.t Q and these two integrals are Q-differentiable. It is noted that the condition of $Q\ll\boldsymbol{P}$ is stronger than that of $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$, therefore, this paper generalizes lemma 4.9 and theorem 4.14 in [1].

Key words: semimartingale; vector stochastic integral; locally absolutely continuity of probability measure; predictable process

虽然多维半鞅按分量的随机积分(Componentwise Stochastic Integral)在随机分析中具有重要的地位, 然而其局限性也日渐显露, 它不仅在随机分析的某些领域中明显不足, 而且在应用中也是不够的。因此近年来出现了半鞅的向量随机积分的理论, 文献[1]中对向量随机积分的产生背景、概念、一般性质做了系统的介绍, 并给出了向量随机积分在金融数学中的应用, 解决了一般情形下的资产定价基本定理。从中可以看出, 向量随机积分不仅是按分量随机积分的推广, 而且具有随机积分的一般性质, 同时还具有重大的应用价值。因此对于半鞅向量随机积分的进一步研究很有必要。

在数理金融学中往往需要考虑所谓的等价鞅测度, 因为在这个等价鞅测度下市场才具有“公平性”, 这就涉及两个测度的绝对连续性问题, 并且需要研究在两个测度下可料过程对半鞅的向量随机积分之间的关系与性质[1-2,4]。本文将文献[1]中引理 4.9 与定理 4.14 推广至 $Q\overset{loc}{\ll}P$ 的情形。这种推广是有实质意义的, 因为对于时间无限的情形, 无论对于投资的控制, 还是从数学的角度都难以处理, 而对于时间

* 收稿日期: 2008- 01- 22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60673090)
作者简介: 屈田兴(1957—), 男, 副教授, 在职博士生。

有限的情形,由于有时间的最后点,鞅具有一致可积性,两个测度的局部绝对连续的条件要比绝对连续容易实现得多。

1 预备知识

设$(\Omega, \mathscr{F}^0)$是可测空间,在其上给定:

(1) 一个右连续的 σ 代数流$F^0 = (\mathscr{F}_t^0)_{t\geqslant 0}, \mathscr{F}_\infty^0 = \mathscr{F}^0$;

(2) 两个概率测度 Q 与$\boldsymbol{P}$。

令

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}(Q + \boldsymbol{P})$$

则在$\mathscr{F}^0$ 上, $Q \ll \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P} \ll \boldsymbol{P}$。约定$F = (F^0)^{\boldsymbol{P}}$, 即

$$\mathscr{F}_t = (\mathscr{F}_t^0)^{\boldsymbol{P}} = \mathscr{F}_t^0 \vee \tilde{\mathscr{N}}, \quad t \geqslant 0$$

其中$\tilde{\mathscr{N}}$是由$\mathscr{F}_\infty = (\mathscr{F}^0)^{\boldsymbol{P}}$中所有$\boldsymbol{P}-$ 零集生成的 σ 代数。取$F = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$为基本流, 则$F$ 满足通常条件。本文中的停时、局部鞅、半鞅等总是分别指$F-$ 停时、$F-$ 局部鞅、$F-$ 半鞅等。对于任意停时 τ, 以$\boldsymbol{P}_\tau$与Q_τ 分别表示$\boldsymbol{P}$ 与Q 在$\mathscr{F}_\tau$ 上的限制。

本文需要引用下列概念与结论。

定义 1 称 Q 关于$\boldsymbol{P}$ 是局部绝对连续的,如果 $Q|_{\mathscr{F}_t} \ll \boldsymbol{P}|_{\mathscr{F}_t}$ 对一切$t \geqslant 0$ 成立。或等价地, $Q_t \ll \boldsymbol{P}_t$ 对一切$t \geqslant 0$ 成立。记为 $Q \overset{loc}{\ll} \boldsymbol{P}$。

定理 1[3] 设 $Q \overset{loc}{\ll} \boldsymbol{P}$, 则存在唯一的非负适应右连左极过程 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$满足下列条件:

(1) $Z_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} Z_t$ $\boldsymbol{P}-a.s.$ 存在, 且

$$\boldsymbol{P}(Z_\infty = \infty) = \boldsymbol{P}(\sup_{t\geqslant 0} Z_t = \infty) = 0$$

$$Q(Z_\infty = 0) = Q(\inf_{t\geqslant 0} Z_t = 0) = 0$$

(2) 对每个停时 τ, 当 $Q_\tau \ll \boldsymbol{P}_\tau$ 时, $Z_\tau = \dfrac{\mathrm{d}Q_\tau}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_\tau}$ $\boldsymbol{P}-a.s.$。特别 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 下是鞅。称 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$为 Q 关于$\boldsymbol{P}$ 的密度过程。

说明 在 $Q \ll \boldsymbol{P}$ 时, 则不必引入 $\boldsymbol{P}$, 而直接用 $\boldsymbol{P}$ 代替$\boldsymbol{P}$, 相应的基本 σ 代数流$F = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$为$(F^0)^{\boldsymbol{P}} = ((F_t^0)^{\boldsymbol{P}})_{t\geqslant 0}$, 这时 Q 关于$\boldsymbol{P}$ 的密度过程就是$(\boldsymbol{E}(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}|\mathscr{F}_t))_{t\geqslant 0}$的右连左极修正。由此不难理解 $Q \overset{loc}{\ll} \boldsymbol{P}$ 较之$Q \ll \boldsymbol{P}$ 的情形在很多问题的研究中要困难,特别是当问题涉及可料区间型集$[0] \cup [Z_- > 0]$时处理通常要麻烦很多。

设 d 是自然数, 用 $\mathscr{S}^d(\boldsymbol{P})$ 表示在 $\boldsymbol{P}$ 下的 d 维半鞅的全体。当 $d = 1$ 时, 简记为$\mathscr{S}(\boldsymbol{P})$。

对$X \in \mathscr{S}(\boldsymbol{P})$, 用$[X](\boldsymbol{P})$表示 X 在$\boldsymbol{P}$ 下的二次变差过程。对 $X \in \mathscr{S}^d(\boldsymbol{P})$, 用 $L(X; \boldsymbol{P})$ 表示关于 $\boldsymbol{P}$ 在半鞅向量随机积分意义下对X 可积的d 维可料过程的全体。若$H \in L(X; \boldsymbol{P})$, 则相应的积分记为$(\boldsymbol{P})H \cdot X$。如果问题只涉及一个概率测度, 则上述记号中的 $\boldsymbol{P}$ 可省略, 例如这时 $\mathscr{S}(\boldsymbol{P})$就写为$\mathscr{S}$。

定理 2 (半鞅 Girsanov 定理[3]) 设 $Q \overset{loc}{\ll} \boldsymbol{P}$, 则当 $X \in \mathscr{S}(\boldsymbol{P})$ 时, $X \in \mathscr{S}(Q)$, 且$[X](\boldsymbol{P})$与$[X](Q)$ $Q-$无区别。

定义 2 记 $\mathscr{M}_{loc}$为局部鞅的全体。对 $M \in \mathscr{M}_{loc}$, 令

$$M_t^* = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_s|, \quad t \geqslant 0$$

称 $M^* = (M_t^*)_{t\geqslant 0}$为 M 的上确界过程。记

$$\mathscr{H}^1 = \{M \in \mathscr{M}_{loc}: \mathrm{E}(M_\infty^*) < \infty\}$$

对 $M\in\mathscr{H}^1$, 令 $\|M\|_{\mathscr{H}^1}=\mathrm{E}(M^*_\infty)$, 则 $\mathscr{H}^1$ 就成为 Banach 空间[3]。

定义 3[6] 设 $X, Y\in\mathscr{S}$, 定义 X 与 Y 的 Emery 距离为

$$\rho(X, Y)=\sup_{|K|\leqslant 1}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\mathrm{E}(|(K\cdot(X-Y))_m|\wedge 1)\right\}$$

其中上确界是对所有使得 $|K|\leqslant 1$ 的可料过程 K 取的。称由 ρ 在 $\mathscr{S}$ 上导出的拓扑为 $\mathscr{S}$ 上的 Emery 拓扑或者半鞅拓扑。若 $\{X_n\}$ 在 $\mathscr{S}$ 中按此拓扑收敛于 X, 则记为 $X_n\xrightarrow{\mathscr{S}}X$。

定理 3[1] $\mathscr{S}$ 按 Emery 拓扑是 Polish 空间, 且有

(1) 若 $X_n\xrightarrow{\mathscr{H}^1}X$, 则 $X_n\xrightarrow{\mathscr{S}}X$;

(2) 若 $X_n\xrightarrow{\mathscr{S}}X$, 则 $X_n\xrightarrow{u.p}X$ (即 $\{X_n\}$ 一致地依测度收敛于 X)。

定理 4 (闭图像定理[5]) 设 X, Y 是 Fr chet 空间, $T: X\to Y$ 是线性闭算子, 则 T 是连续算子。

定理 5[1] 设 $X\in\mathscr{S}^d$, $\{H_n\}$ 是一列 d 维可料过程, 且 $\{H_n\}$ 点点收敛于 H。若存在 $c\geqslant 0$, 使 $\|H_n\|\leqslant c\ (n=1, 2, \cdots)$, 则 $H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}}H\cdot X$, 其中 $\|\cdot\|$ 是 d 维欧氏范数。

定理 6[1] 设 $X\in\mathscr{S}^d$, $H\in L(X)$。令 $H_n=HI_{[\|H_n\|\leqslant n]}$, 则 $H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}}H\cdot X$。

定理 7[1] 设 $X\in\mathscr{S}^d$, H 是 d 维可料过程。令 $H_n=HI_{[\|H_n\|\leqslant n]}$, 若 $H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}}Z$, 则 $H\in L(X)$, 且 $Z=H\cdot X$。

2 主要结果及证明

定理 8 设 $\{X_n\}\subseteq\mathscr{X}(\boldsymbol{P})$, $\{X_n\}$ 在关于 $\boldsymbol{P}$ 的 Emery 拓扑空间中收敛于 X。若 $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$, 则 $\{X_n\}\subseteq\mathscr{X}(Q)$, 且 $\{X_n\}$ 在关于 Q 的 Emery 拓扑空间中也收敛于 X。

证明 由定理 2 得到 $\mathscr{X}(\boldsymbol{P})\subseteq\mathscr{X}(Q)$。令 $\varphi: \mathscr{X}(\boldsymbol{P})\to\mathscr{X}(Q)$ 为 $\varphi(X)=X$, 则显然 φ 是线性映射。为证结论, 只要证 φ 连续。由于 $\mathscr{X}(\boldsymbol{P})$ 与 $\mathscr{X}(Q)$ 都是 Fr chet 空间, 根据定理 4 这只要证明 φ 是闭算子。

事实上, 设 $Y_n\xrightarrow{\mathscr{X}(\boldsymbol{P})}Y$, $Y_n\xrightarrow{\mathscr{X}(Q)}Y$, 则由定理 3 得 $Y_n\xrightarrow{u.p}Y$ 在测度 $\boldsymbol{P}$ 下成立, $Y_n\xrightarrow{u.p}Y$ 在测度 Q 下成立。于是对任意 $t\geqslant 0$ 与 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}((Y_n-Y)^*_t\geqslant\varepsilon)=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}_t((Y_n-Y)^*_t\geqslant\varepsilon)=0$$

由于 $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$, 记 Z 为 Q 关于 $\boldsymbol{P}$ 的密度过程, 则由定理 1 及上式得

$$Q((Y_n-Y)^*_t\geqslant\varepsilon)=\int_{[(Y_n-Y)^*_t\geqslant\varepsilon]}\mathrm{d}Q=\int_{[(Y_n-Y)^*_t\geqslant\varepsilon]}Z_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{P}\to 0$$

故 $Y_n\xrightarrow{u.p}Y$ 在测度 Q 下也成立。因此 Y 与 Y $Q-$ 无区别, 这表明 $\varphi(Y)=Y$。因此 φ 是闭映射。

定理 9 设 $X\in\mathscr{S}^d(\boldsymbol{P})$, $H\in L(X;\boldsymbol{P})$。若 $Q\overset{loc}{\ll}\boldsymbol{P}$, 则 $X\in\mathscr{S}^d(Q)$, $H\in L(X;Q)$, 且 $(\boldsymbol{P})H\cdot X$ 与 $(Q)H\cdot X$ $Q-$ 无区别。

证明 由定理 2 得出 $X\in\mathscr{S}^d(Q)$。令

$$\mathscr{H}=\{H: H\ \text{是有界的}\ d\ \text{维可料过程}, (\boldsymbol{P})H\cdot X\ \text{与}\ (Q)H\cdot X\ Q-\text{无区别}\}$$

则 $\mathscr{H}$ 是 $L(X;\boldsymbol{P})$ 的线性子空间。记

$$\mathscr{C}=\{B\times\{0\}: B\in\mathscr{F}_0\}\cup\{B\times(s, t]: 0\leqslant s<t<\infty, B\in\mathscr{F}_s\}$$

则 $\mathscr{C}$ 是 π 类, 而且 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{P}$ 是可料 σ 代数。易知

(1) 对 $a\in\mathbf{R}^d_+$, 有 $a\in\mathscr{H}$, 其中 a 也视为常值过程 $aI_{\Omega\times\mathbf{R}_+}$。这是由于 $(\boldsymbol{P})\,a\cdot X=aX$, $(Q)\,a\cdot X=aX$,

故由定理 2 得 $a\in\mathscr{H}$。

(2) 设$\{H_n\}\subseteq\mathscr{H}$, $0\leqslant H_n\uparrow H$, 且 H 有界, 则$H\in\mathscr{H}$。事实上, 由定理 5 得

$$(\boldsymbol{P})H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}(\boldsymbol{P})}(\boldsymbol{P})H\cdot X \tag{1}$$

$$(Q)H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}(Q)}(\boldsymbol{Q})H\cdot X \tag{2}$$

于是由定理 8 与(1)式得到

$$(\boldsymbol{P})H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}(Q)}(\boldsymbol{P})H\cdot X \tag{3}$$

由于$(\boldsymbol{P})H_n\cdot X$ 与$(Q)H_n\cdot X$ Q- 无区别($n=1,2,\cdots$), 故由式(2)与(3)推出$(\boldsymbol{P})H\cdot X$ 与$(Q)H\cdot X$ Q- 无区别。可见$H\in\mathscr{H}$。

(3) 对 $a\in\mathbf{R}^d_+$, $C\in\mathscr{C}$, 同样易得出 $aI_C\in\mathscr{H}$。

因此由多维函数形式的单调类定理, 得到 $\mathscr{H}$包含一切有界的 d 维可料过程。这表明对任何有界的 d 维可料过程H, 都有$(\boldsymbol{P})H\cdot X$ 与$(Q)H\cdot X$ Q- 无区别。

一般地, 对 $H\in L(X;\boldsymbol{P})$, 令 $H_n=HI_{[\|H_n\|\leqslant n]}$, $n=1,2,\cdots$, 则由定理 6, 得

$$(\boldsymbol{P})H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}(\boldsymbol{P})}(\boldsymbol{P})H\cdot X$$

于是由定理 8 得

$$(\boldsymbol{P})H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}(Q)}(\boldsymbol{P})H\cdot X \tag{4}$$

但由于每个H_n 是有界的d 维可料过程, 所以$(\boldsymbol{P})H_n\cdot X$ 与$(Q)H_n\cdot X$ Q- 无区别($n=1,2,\cdots$)。进而由(4)式与定理 7 得出$(\boldsymbol{P})H\cdot X$ 与$(Q)H\cdot X$ Q- 无区别。

关于向量随机积分, 文献[1]中只给出了一般性质, 还有许多方面值得进一步研究与探讨。

参 考 文 献:

[1] Shiryaev A N, Chernyi A S. Vector Stochastic Integrals and the Fundamental Theorems of Asset Pricing[J]. Tr.MIAN, 2002, 237: 12- 56.

[2] Cherny A S. Vector Stochastic Integrals in the First Fundamental Theorem of Asset Pricing[C]//Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance, INRIA, 1998: 149- 163.

[3] 何声武, 汪嘉冈, 严加安. 半鞅与随机分析[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[4] 金治明. 数学金融学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[5] Wilanskyn A. Mordern Methods in Topological Vector Spaces[M]. Mc Graw-hills Inc., 1978.

[6] Emery M. Une Topologie Sur L' espace des Semimartingales[R]. Lecture Notes in Mathematics, 1979, 721: 260- 280.