文章编号:1001-2486(2008)03-0090-05

基于复合等效可信度加权的 Bayes 融合评估方法*

段晓君,王 刚
(国防科技大学 理学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:在小子样试验评估时,为避免大量先验信息湮没实际飞行试验的信息,融合先验补充样本时通常会进行数学相容性检验并加权。首先分析了小子样情形下直接根据数据计算数学相容性可能造成的不稳定性,为改善这种情况,根据不同试验类型的不同试验环境,对不同试验类型下的误差进行分析和折合,定义了物理等效可信度;并结合物理等效可信度和数学相容性检验,得到先验样本的复合等效可信度权重,基于正态逆伽玛分布计算了 Bayes 融合评估的后验结果;通过比较 Bayes 估计后验方差与不融合先验信息的估计后验方差,根据先验信息参与融合后是否能减小后验方差来判断先验样本是否应该参与融合。理论分析和仿真说明,基于复合等效可信度的加权方法是合理的。

关键词:复合等效可信度;加权融合;试验评估;小子样
中图分类号:TP202.1 文献标识码:A

Weighted Bayesian Fusion Evaluation Basing on Composite Equivalency Model

DUAN Xiao-jun, WANG Gang
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In the test evaluation for small sample size, the prior information is generally fused to obtain the evaluation result with weight calculated by the data consistency check for test infomation and prior information. However, in small sample case, the consistency between two kinds of samples may be unstable. To improve this situation, the physical equivalency credibility is defined by analyzing different test surroundings. Moreover, the composite equivalency weight of prior sample is decided by fusing physical equivalency credibility and data consistency. A weighted method for considering the credibility of the prior information is proposed for Bayesian estimation algorithm and the weighted estimation of normal inverse-Gamma distribution parameters is provided. The efficiency of the prior sample is analyzed by comparing the posterior variances for different cases, and is further applied to determine whether the prior samples should be fused in the conception that only those prior samples which can reduce the posterior variance should be used. Theoretical analysis and simulation demonstrate that this method is credible.

Key words: composite equivalency credibility; weighted fusion; test evaluation; small sample

在小子样试验评估中,由于实际飞行试验少,需要融合先验样本。先验样本是根据地面试验、已有类似型号的试验、仿真试验等得到的。通常有较大量的先验样本,为避免大量先验信息湮没实际飞行试验的信息,必须考虑给先验样本进行加权[1-2],一般基于数据直接进行数学相容性检验加权[2]。

文献[3]针对目前昂贵的大型复杂结构体系的极小子样试验,给出了半经验试验评估方法,即在由经验已知同类试验的密度分布形式及参数情况下,据本次试验件的试验均值得出参数下限值。文献[4]研究了考虑验前信息可信度时的先验分布和 Bayes 估计,基于给定的验前可信度,考虑用现场试验子样拟合的分布对先验分布进行加权修正,这是一种加权的思路。文献[5]研究了样本容量、验前信息与 Bayes 决策风险的关系,主要关心样本容量与决策风险之间的关系,认为验前信息的可信度与验前费用紧密相关。

由于制导武器试验一般是小子样或特小子样,若只进行数学的相容性检验会带来很大风险,因此,

* 收稿日期:2007-12-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60604020);航天支撑基金资助项目(2006-HT-GFKD-02)
作者简介:段晓君(1976—),女,副教授,博士。

一个有效的解决手段是通过物理背景的分析对先验样本进行物理可信度分析, 再结合数据的相容性检验, 进行 Bayes 加权融合估计。

1 物理等效可信度

根据文献[6], 当先验均值有偏差时, Bayes 估计相对于先验信息不参加融合的估计不具有 PPC 优良性。因此, 先验信息的不准确会造成 Bayes 估计不准确, 必须考虑合理利用先验信息。

1.1 小子样下数学相容性检验的不稳定性

小子样下数学相容性计算的可信度有时是不完全令人信服的。举例如下, 生成服从正态分布 $N(0, 1)$ 的两类随机样本: $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ 和 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_5^{(1)}, x_6^{(1)}$, 样本容量仅为 2 和 6, 计算这两类样本之间的相容性。从理论分析而言, 二者均从同一个总体得到, 因此, 相容性应该较高。但是我们随机生成不同的样本, 利用秩和相容性检验方法计算得到结果如表 1 所示。结果差异很明显, 这是由于样本数太少造成的结果不稳定性。

表 1 小子样下数学相容性计算得到的可信度

Tab.1 The credibility calculated by mathematical consistency of the small sample size data

实验次数	1	2	3	4	5
同一分布下两类样本的相容性	0.8571	0.3571	0.7143	0.5714	0.9286

1.2 物理等效可信度

首先从物理机理上分析先验样本与实际样本分布的区别。通过对影响精度的不同试验环境及相关因素信息进行分析, 对不同类型试验之间的等效折合关系进行研究, 并建立起相应的关联关系。如果不考虑可以标校的系统误差, 则主要分析随机误差, 根据物理背景分析差异, 然后相应进行误差折合。

假设考虑雷达寻的制导精度。以热噪声引起的雷达测距误差为例[7]: $\sigma_{t_r} = \dfrac{4R^2\sqrt{6\pi N_0}}{B_L G\lambda\sqrt{P_t\sigma t}}$, 其中, R 为弹目距离; N 为噪声功率谱密度; $B_L = \{x_i^{(1)}\}_{i=1}^{n}$, 为其调制带宽; G 为雷达天线增益; λ 为雷达波长; P_t 为雷达发射功率; σ 为目标的散射截面积, t 为脉冲间隔。这样, 针对不同试验环境中噪声功率谱密度变化和弹目距离的变化, 可以得到相应的测距误差范围折合值:

$$\frac{\sigma_{t_r\text{折合}}}{\sigma_{t_r 0}} = \left(\frac{4R_{\text{折}}^2\sqrt{6\pi N_{\text{折}}}}{B_L G\lambda\sqrt{P_t\sigma_{\text{折}} t}}\right) \Big/ \left(\frac{4R_0^2\sqrt{6\pi N_0}}{B_L G\lambda\sqrt{P_t\sigma_0 t}}\right) = \frac{R_{\text{折}}^2\sqrt{N_{\text{折}}\sigma_0}}{R_0^2\sqrt{N_0\sigma_{\text{折}}}} \tag{1}$$

折合值参与融合时, 必须考虑其物理等效可信度。我们定义物理等效可信度为

$$w_{background} = \frac{1}{1+\lambda(\sigma_{\text{折合误差}}/\sigma_{\text{总误差}})^{\gamma}} \tag{2}$$

其中, $\sigma_{\text{折合误差}}$ 为折合过程误差, 可以依据物理模型的精度和误差传播关系推导得到; $\sigma_{\text{总误差}}$ 为观测总误差; 参数 λ 和 γ 为衡量变化速率的参数, 对于不同类型试验应该是不同的, 我们通常选 $\lambda\in[0.5, 2]$, $\gamma\in[1, 2]$, 此时函数变化速率较为缓慢; 当然也可以考虑结合工程经验对参数进行选取。如果 $\sigma_{\text{折合误差}}$ 为 0, 则 $w_{background}$ 为 1, 即物理等效可信度为 1; 如果 $\sigma_{\text{折合误差}} \approx \sigma_{\text{总误差}}$, 则 $w_{background} \approx \dfrac{1}{1+\lambda}$。

1.3 复合等效可信度

融合物理等效可信度信息和数学相容性检验可信度信息的复合等效可信度如下:

$$w_{composite} = (1-p)\cdot w_{background} + p\cdot w_{consistency} \tag{3}$$

其中, p 为数据相容性检验在复合等效可信度中所占的比例, $p\in(0, 1)$。通常而言, 记先验样本量为 n_0, 实际试验样本量为 n, 显然, n_0 和 n 均很大时, 根据大量样本及其分布计算的数据相容性更为可信, 因此根据数据相容性检验得到的可信度 $w_{consistency}$ 应该随 n_0 和 n 的增大而增加, 这是构造 p 时必须遵循的原则。本文算例中取 $p = (1+3/n)^{-1}(1+3/n_0)^{-1}$。

2 基于正态-逆 Gamma 分布和复合等效可信度的 Bayes 融合评估方法

2.1 先验分布参数确定

设有 $N(\mu, D)$ 总体, 其中 $D=\sigma^2$, 设有先验样本$\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^{n_0}$, 先验样本均值和方差分别为

$$\overline{X}^{(0)} \triangleq a=\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}x_i^{(0)},\quad S_0{}^2\triangleq u=\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}[x_i^{(0)}-a]^2 \tag{4}$$

$(a, u)=(a, S_0^2)$ 为 (μ, D) 的充分统计量。以下要给出已知 (a, S_0^2) 的情况下, 参数 (μ, D) 的分布形式。由于

$$\pi(\mu, D\mid a, S_0^2)=\pi(a, S_0^2\mid \mu, D)\cdot\pi(\mu, D)/\pi(a, S_0^2)$$

一般的, 认为给定参数 (μ, D) 的情况下, a 服从 $N(\mu, \frac{D}{n_0})$ 分布, 而对于方差 S_0^2 而言, $\xi\triangleq\frac{n_1}{D}S_0{}^2=\frac{n_0}{D}u$, 服从 $\chi^2(n_0-1)$ 分布, 其分布函数为 $f(x)=2^{-\frac{n_0-1}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma((n_0-1)/2)}x^{\frac{n_0-3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, 则作 $u=\frac{D}{n_0}\xi$ 变换后的分布函数为

$$f(y)=2^{-\frac{n_0-1}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma((n_0-1)/2)}\left(\frac{n_0}{D}x\right)^{\frac{n_0-3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{D}x\right)}\cdot\frac{n_0}{D}$$

故有

$$\pi(a\mid\mu, D)\propto D^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0}{2D}(a-\mu)^2} \tag{5}$$

$$\pi(u\mid\mu, D)\propto u^{\frac{n_0-3}{2}}D^{-\frac{n_0-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0u}{2D}},\quad u>0 \tag{6}$$

由于 a, S_0^2 独立, 故

$$\pi(a, S_0^2\mid\mu, D)\propto D^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0}{2D}(a-\mu)^2}u^{\frac{n_0-3}{2}}D^{-\frac{n_0-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0u}{2D}} \tag{7}$$

假定先验样本之前无任何信息可用, 则有无信息先验 $\pi(\mu, D)\propto D^{-1}$, 则此时 $\theta=(\mu, D)$ 的验后密度为

$$\begin{aligned}\pi(\mu, D\mid a, S_0^2)&=\pi(a, S_0^2\mid\mu, D)\cdot\pi(\mu, D)/\pi(a, S_0^2)\propto\pi(a, S_0^2\mid\mu, D)\cdot\pi(\mu, D)\\&\propto D^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0}{2D}(a-\mu)^2}u^{\frac{n_0-3}{2}}D^{-\frac{n_0-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0u}{2D}}\cdot D^{-1}\propto D^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0}{2D}(a-\mu)^2}D^{-\frac{n_0-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0u}{2D}}\cdot D^{-1}\\&=D^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n_0}{2D}(a-\mu)^2}D^{-(\alpha+1)}\mathrm{e}^{-\frac{n_0u}{2D}}\end{aligned} \tag{8}$$

与正态-逆 Gamma 分布形式对照, 知参数 (μ, D) 服从正态-逆 Gamma 分布, 分布密度函数为

$$N(\overline{X}^{(0)}, \frac{D}{n})\cdot g(D;\alpha_0, \beta_0) \tag{9}$$

参数表示如下:

$$\alpha_0=\frac{n_0u}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}[x_i^{(0)}-\overline{X}^{(0)}]^2,\quad \beta_0=\frac{n_0-1}{2} \tag{10}$$

2.2 基于复合等效可信度的加权 Bayes 融合估计

设有 $N(\mu, D)$ 总体, 其中 $D=\sigma^2$, 进行第一阶段试验后, 得到样本$\{x_i^{(1)}\}_{i=1}^{n_1}$, 则均值和方差分别为

$$\overline{X}^{(1)}\triangleq a=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_i^{(1)},\quad S_1{}^2\triangleq u^{(1)}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}[x_i^{(1)}-a]^2 \tag{11}$$

$$\alpha_1=\frac{n_0u^{(0)}}{2}+\frac{n_1u^{(1)}}{2}+\frac{n_0n_1[\overline{X}^{(1)}-\overline{X}^{(0)}]^2}{2(n_0+n_1)},\quad \beta_1=(n_0+n_1-1)/2$$

当进行第二阶段试验后, 得$\{x_i^{(2)}\}_{i=1}^{n_2}$个样本, 记

$$\overline{X}^{(2)}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}X_i^{(2)},\quad u^{(2)}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}[X_i^{(2)}-\overline{X}^{(2)}]^2$$

考虑第一阶段试验的复合等效可信度 $w_{composite}$后,

$$\pi(\mu, D \mid \overline{X}^{(2)}, u^{(2)}) \propto N(\mu_2, \eta_2 D) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_2, \beta_2) \tag{12}$$

其中,

$$\mu_2 = \frac{w_{composite} n_1 \overline{X}^{(1)} + n_2 \overline{X}^{(2)}}{w_{composite} n_1 + n_2}, \quad \eta_2 = \frac{1}{w_{composite} n_1 + n_2} \tag{13}$$

$$\alpha_2 = \frac{w_{composite} n_1 u^{(1)}}{2} + \frac{n_2 u^{(2)}}{2} + \frac{w_{composite} n_1 n_2 [\overline{X}^{(2)} - \overline{X}^{(1)}]^2}{2(w_{composite} n_1 + n_2)}, \quad \beta_2 = (w_{composite} n_1 + n_2 - 1)/2 \tag{14}$$

类似地, N 个阶段之后, 有

$$\pi(\mu, D \mid \overline{X}^{(N)}, u^{(N)}) \sim N(\mu_N, \eta_N D) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_N, \beta_N) \tag{15}$$

其中, μ_N, η_N 以及 α_N, β_N 可由递推公式运算而得。在平均损失函数下, 可得 μ 和 D 的 Bayes 估计为

$$\hat{\mu}_B = \mu_N, \quad \hat{D}_B = \alpha_N / (\beta_N - 1) \tag{16}$$

μ 和 D 的验后方差为

$$\mathrm{Var}(\mu_B) = \alpha_k / [(2\beta_k + 1)(\beta_k - 1)], \quad \mathrm{Var}(D_B) = \alpha_k^2 / (\beta_k - 1)^2 (\beta_k - 2) \tag{17}$$

实际上, 经典 Bayes 加权方法即式(3) 中 $p = 1$ 的特殊情形, 即只考虑数据相容性检验的相容性。

3 仿 真

3.1 融合流程

(1) 得到环境 1 和目标 1 参数下的落点偏差样本 1, 以及环境 2 和目标 2 参数下的落点偏差样本 2, 进行物理背景差异分析及误差折合, 得到 1 至 2 精度折合值, 并得到折合误差;

(2) 计算落点先验样本 1 和落点实际样本 2 的物理等效可信度, 然后计算数据相容性得到的可信度, 根据先验样本量和实际试验样本量计算出融合权重, 得到复合等效可信度;

(3) 采用正态- 逆 Gamma 分布, 情况 1 样本为补充子样, 权重即为复合等效可信度, 情况 2 为实际样本, 将二者进行 Bayes 融合估计, 计算均值和方差的 Bayes 融合估计结果及二者的后验方差;

(4) 直接利用情况 2 的实际样本计算结果及后验方差, 比较后验方差大小, 判断先验信息的利用价值, 最后确定是否融合先验信息。

3.2 算例

例 1 在武器落点精度试验中, 6 个实际纵向落点偏差样本为(单位: m) : $x = [0.25, 9.3, 5.5, 4.0, 1.1, 2.2]$; 补充样本为 $x_0 = [10.0, 8.1, 13.1, 3.3, 6.5, 4.6, 4.8, -10.6, -8.8, -10.7]$; 这里, 补充样本服从的分布与真实试验的分布有一定差异。

考虑到工程应用时实际样本服从分布的参数是未知的, 直接利用采样数据(包括 6 个实际样本和 10 个补充样本) 进行分析。若不融合先验信息, 直接利用 6 个实际样本, 计算得到

$$\mu = 3.6969, \quad \sigma = 3.8972$$

后验方差为 $\mathrm{Var}(\mu) = 3.0888, \quad \mathrm{Var}(\sigma) = 26.2095$

分析补充样本的物理等效可信度, 在 $w_{background} = \dfrac{1}{1 + \lambda(\sigma_{折合误差} / \sigma_{总误差})^{\gamma}}$ 中, 如果取 $\lambda = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma_{折合误差} = 30$, $\sigma_{总误差} = 40$, 算出物理等效可信度为 $w_{background} = 0.5714$, $w_{consistency} = 0.2075$, $w_{composite} = 0.3895$, 则 Bayes 融合估计结果为

$$\mu_{融合} = 3.0762, \quad \sigma_{融合} = 6.7252$$

后验方差为 $\mathrm{Var}(\mu_{融合}) = 4.8972, \quad \mathrm{Var}(\sigma_{融合}) = 30.9744$

对比直接计算的结果和 Bayes 融合估计结果, 可知融合后的后验方差反而比融合前的后验方差大, 即先验样本参与融合后反而增大了后验方差, 说明先验样本与实际样本不相容的程度太高, 不适宜将先验样本进行融合估计, 而应该直接利用实际样本进行估计。

例 2 在武器落点精度试验中, 6 个实际纵向落点偏差样本为(单位: m) : $x = [0.77, 5.60, 14.64,$

$-9.79, 17.6, -12.1]$；补充样本为 $x_0 = [-11.32, -1.65, 12.97, -27.91, -10.88, 8.32, -14.95, 3.61, -5.03, 0.28]$；这里补充样本服从的分布与真实试验的分布是相同的，都是 $N(0, 10^2)$。

若不融合先验信息，直接利用 6 个实际样本，计算得到

$$\mu = 2.7785, \quad \sigma = 14.5931$$

后验方差为 $$\mathrm{Var}(\mu) = 41.9907, \quad \mathrm{Var}(\sigma) = 356.3033$$

补充样本的物理等效可信度为 $w_{background} = 1$, $w_{consistency} = 0.7365$, $w_{composite} = 0.8683$, Bayes 融合估计结果为

$$\mu_{融合} = -1.5761, \quad \sigma_{融合} = 13.098$$

显然比不融合先验信息时的结果更接近真实正态分布的均值 0 和方差 10。当然，实际应用中通常是不知道真实正态分布参数的，但是我们可以通过融合与否的后验方差的比较来判断是否应该融合先验信息。

计算 μ 和 σ 的后验方差，得到

$$\mathrm{Var}(\mu_{融合}) = 12.1919, \quad \mathrm{Var}(\sigma_{融合}) = 81.3570$$

对比直接计算的结果和 Bayes 融合估计结果，可以发现：本例中融合先验信息后，参数估计的后验方差只有融合前参数估计的后验方差的四分之一，说明先验样本与实际样本相容性很好，融合先验样本进行评估改善了估计效果，减小了参数的后验方差，得到了更稳健的估计结果。

与只考虑数据相容性不考虑物理等效可信度的经典 Bayes 加权方法比较，本文的方法更为稳健，可以有效降低小子样数据相容性检验不稳定对评估结论带来的不稳定的影响。

4 结论

由于对小子样进行数学的相容性检验会带来很大风险，同一总体下的小子样也可能相容性很差，或者不同总体的小子样可能相容性很高。因此，本文提出的一个解决手段是通过物理背景的分析得到先验样本的物理等效可信度，结合数学相容性检验得到复合等效可信度，然后进行 Bayes 加权融合估计。基于正态–逆 Gamma 分布计算了 Bayes 融合评估的后验结果，并比较 Bayes 估计后验方差与不融合先验信息的估计后验方差，判断是否融合先验样本。当然，这里在定义物理等效可信度函数及其计算复合可信度中所占比例时，我们提供了构造等效度函数和比例值函数的准则，还提供了例子，具体应用时可以依据不同工程背景对函数类型及参数进行相应调整。显然，这种方法本质上是工程化方法与数学方法的结合，拓展了融合先验信息的加权 Bayes 方法的思路，与物理工程背景结合紧密，有其合理性和实用性。

参考文献：

[1] 张金槐，唐雪梅. Bayes 方法(修订版)[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1993: 1–3, 54–57.
[2] 唐雪梅，张金槐，邵凤昌，等. 武器装备小子样试验分析与评估[M]. 北京：国防工业出版社，2001: 1–3.
[3] 冯蕴雯，黄玮，吕震宙，等. 极小子样试验的半经验评估方法[J]. 航空学报，2004, 25(9): 456–459.
[4] 李鹏波，谢红卫，张金槐. 考虑验前信息可信度时的 Bayes 估计[J]. 国防科技大学学报，2003, 25(4): 107–110.
[5] 张湘平，张金槐，谢红卫. 关于样本容量、验前信息与 Bayes 决策风险的若干讨论[J]. 电子学报，2003, 31(4): 536–538.
[6] 王国富，任海平，彭伟锋. 先验信息有偏时 Bayes 估计的 PPC 优良性条件[J]. 中南大学学报(自然科学版)，2004, 25(5): 686–689.
[7] 丁鹭飞，耿富录. 雷达原理[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2002.