文章编号: 1001- 2486(2008)03- 0095- 05

矩阵代数中可乘保范映照的显形式*

戴清平, 冯良贵
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 在矩阵的可乘映照理论与应用中, 判定一个可乘映照是否保持某类特定的数值特征以及获取可乘映照在保持某类数值特征条件下的解析式备受关注。对此, 着重研究了一般可乘映照在具有某种保秩性或保范性下的表示问题。借助于构造的方法, 给出了判定一个可乘映照是否为保秩映照的新的便捷方法。针对 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$, 分别得到了 $M_n(\boldsymbol{F})$ 上保 1- 范数、保∞- 范数以及保 F 范数的可乘映照的显形式, 进而证明了 $M_n(\boldsymbol{F})$ 上保持 1- 范数可乘映照必为保 F 范数映照, 而可乘保 F 范数映照又一定保谱半径、保数值半径、保正规性、保酉性等。

关键词: 可乘映照; 矩阵范数; 表示
中图分类号: O174; O151.21 文献标识码: A

Explicit Forms of Norm Preserving Multiplicative Maps

DAI Qing-ping, FENG Liang-gui
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: With the multiplicative map theory on matrix and its applications, a lot of attempts have been made for judging whether a multiplicative map can preserve certain desired numerical characters and obtain the explicit form of a multiplicative map under the restriction of perserving some numerical characters. In this respect, multiplicative maps without assuming linearity on matrix algebra, which have certain rank preserving or norm preserving properties, are considered mainly in this paper. By virtue of a way of construction, the complete descriptions of those maps are presented, and it is shown that a maximum column sum norm preserving multiplicative map is one of Frobenius norm and a Frobenius norm preserving multiplicative map must preserve spectral radius, numerical radius, normality, unitarity etc.. In particular, a new approach is also provided for judging whether a multiplicative map preserves rank.

Key words: mutliplicative map; matrix norm; representation

设 $\boldsymbol{F}$ 为数域, $\phi: M_n(\boldsymbol{F}) \rightarrow M_n(\boldsymbol{F})$ 为映照, 其中 $M_n(\boldsymbol{F})$ 表示域 $\boldsymbol{F}$ 上的 n 阶方阵集合。若 ϕ 满足: $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B)$ 对任意 $A, B \in M_n(\boldsymbol{F})$ 皆成立, 则称 ϕ 为可乘映照。可乘映照保持性问题的研究是一个十分活跃的研究话题, 其中的有些问题, 例如关于可乘保谱映照、可乘保谱半径映照、可乘保数值半径映照、可乘保数值域映照及可乘保正规性映照的特征描述等, 已经获得了很好的回答[1-9]。本文的主要目的是: 一方面, 给出一个判定可乘映照是否为保秩映照的新的便捷方法; 另一方面, 针对 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$, 给出 $M_n(\boldsymbol{F})$ 上保 1- 范数、保∞- 范数以及保 F 范数的可乘映照的显形式, 从而证明 $M_n(\boldsymbol{F})$ 上保 1 - 范数可乘映照必为保 F 范数映照, 而可乘保 F 范数映照又一定保谱半径、保数值半径、保正规性及保酉性等。

设 $\boldsymbol{F}$ 为数域, $\phi: M_n(\boldsymbol{F}) \rightarrow M_n(\boldsymbol{F})$ 为可乘映照。熟知, ϕ 称为是保秩 k 的是指: 对秩为 k 的任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均有 $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A})=k$; ϕ 称为是秩非升的是指: 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均有 $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$; 而 ϕ 称为是保秩的是指: 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$。设 $\|\cdot\|$ 为 $M_n(\boldsymbol{F})$ 上的范数, 可乘照映 $\phi: M_n(\boldsymbol{F}) \rightarrow M_n(\boldsymbol{F})$ 称为是可乘保范映照是指: $\|\phi(\boldsymbol{A})\|=\|\boldsymbol{A}\|$ 对任意 $\boldsymbol{A} \in M_n(\boldsymbol{F})$ 皆成立。注意到, 根据矩阵的秩,

* 收稿日期: 2007- 12- 05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471045); 新世纪优秀人才计划项目
作者简介: 戴清平(1966—), 男, 副教授, 在职博士生。

$M_n(\boldsymbol{F})$ 可分 $n+1$ 个等价类: 秩为 0 的等价类记为 $\mathscr{T}_0$, 秩为 1 的等价类记为 $\mathscr{T}_1$, ……, 称为 n 的等价类记为 $\mathscr{T}_n$。任取 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathscr{T}_r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 能被写成 $P_1 \cdots P_s \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 \cdots, Q_r$, $\boldsymbol{B}$ 也能被写成 $W_1 \cdots W_p \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_1 \cdots V_q$, 其中 P_i, Q_j, W_k, V_l 皆为初等非奇异阵。因此, 可构造下列等式:

$$\boldsymbol{A} = P_1 \cdots P_s \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_p^{-1} \cdots W_1^{-1} W_1 \cdots W_p \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_1 \cdots V_q \cdot V_q^{-1} \cdots V_1^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 \cdots Q_t$$

令

$$\boldsymbol{X} = P_1 \cdots P_s \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_p^{-1} \cdots W_1^{-1}, \quad \boldsymbol{Y} = V_q^{-1} \cdots V_1^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 \cdots Q_t$$

则有

$$\phi(\boldsymbol{A}) = \phi(\boldsymbol{X})\, \phi(\boldsymbol{B})\, \phi(\boldsymbol{Y})$$

从而 $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{B})$, 进而 $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{B})$。这表明映照 $\operatorname{rank}\phi(-)|_{\mathscr{T}_r}$ 为常值函数。因此可引进如下定义:

定义 1 设 F 为数域, $\phi: M_n(\boldsymbol{F}) \rightarrow M_n(\boldsymbol{F})$ 为可乘映照。令 $T = \{k \mid \phi$ 是保秩 k 的, $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}\}$, 称 T 为 ϕ 的秩保特征集。

通篇中约定, n 为大于 1 的自然数, $\mathbf{R}$ 表实数集, $\mathbf{C}$ 表复数域, $\boldsymbol{F}$ 表数域。对 $\boldsymbol{A} \in M_n(\boldsymbol{F})$, 用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置, $\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置。环同态均指保持单位元的环同态。

1 可乘保范映照的一般表示

本节主要给出可乘保范映照的一般形式, 其基本结果在后文中也将用到。首先, 需要如下引理:

引理 1[8] 设 D 为一个主理想整环, $f: M_n(D) \rightarrow M_n(D)$ 为可乘映照。若有某个 $\boldsymbol{A} \in M_n(D)$ 使得 $f(A) \neq 0$ 且 $\det A = 0$, 则 f 必具有下列形式之一:

(1) $f(X) = g(X) + E$, 其中, X 为变元, $\boldsymbol{E}$ 为幂等阵, $g: M_n(D) \rightarrow M_n(D)$ 为可乘映照且零化 $M_n(D)$ 中一切行列式为 0 的矩阵。

(2) $f(X) = \boldsymbol{R}(\tau(x_{ij}))\boldsymbol{R}^{-1}$, 其中, $\boldsymbol{R}$ 为 $M_n(D)$ 中的某个可逆阵, τ 为 D 上的某个自同态, $X = (x_{ij})_{n\times n}$ 为变元。

(3) $f(X) = \boldsymbol{R}(\tau(x_{ij}))^c \boldsymbol{R}^{-1}$, 其中, $\boldsymbol{R}$ 为 $M_n(D)$ 中的某可逆阵, τ 为 D 上的某自同态, $X = (x_{ij})_{n\times n}$ 为变元, $(\tau(x_{ij}))^c$ 表矩阵 $(\tau(x_{ij}))$ 的余子式矩阵(Cofactor)。

利用引理 1 可给出引理 2, 其内容与文献[6]中的命题 2.2 及 2.5 有着密切的关系。

引理 2 设 $\boldsymbol{F}$ 为数域, $\phi: M_n(\boldsymbol{F}) \rightarrow M_n(\boldsymbol{F})$ 为可乘映照, T 表 ϕ 的秩保特征集, 则有以下几条等价:

(1) ϕ 是保秩的(即 T 的基数 $= n+1$);

(2) $\phi(\boldsymbol{0}) = 0$ 及存在某个秩为 1 的 W 使得 $\phi(W) \neq \boldsymbol{0}$;

(3) 存在 $\boldsymbol{F}$ 上的某单自同态 τ 及某个可逆阵 $\boldsymbol{R}$, 使得 $\phi(X) = \boldsymbol{R}(\tau(x_{ij}))\boldsymbol{R}^{-1}$, 其中 $X = (x_{ij})$ 为变元;

(4) T 的基数 $\geqslant 3$。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然。

(2) $\Rightarrow$ (1)。对 n 分为两种情形: (i) $n = 2$, (ii) $n > 2$。

(i) $n = 2$ 时, 设 ϕ 可表为 $\phi(X) = g(X) + \boldsymbol{E}$, 其中, $X = (x_{ij})$ 为变元, $\boldsymbol{E}$ 为幂等阵, g 为可乘映照且对一切 $\det X = 0$ 的 X 均有 $g(x) = \boldsymbol{0}$。于是由(2)得

$$\begin{cases} \boldsymbol{0} = \phi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{E} \\ \phi(W) = \boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

矛盾。因此 ϕ 只能有引理 1 中的(2)或(3)形式。若 ϕ 具有引理 1 中的(3)形式, 则

$$\operatorname{rank}\phi(W) = \operatorname{rank}\phi\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^C = 1$$

此时易知 ϕ 是保秩的。显然引理 1 的(2) 形式总是保秩的,如所需。

(ii) $n>2$ 时,同样可肯定 ϕ 具有引理 1 中的(2) 形式或(3) 形式。现若 ϕ 具有引理 1 中的(3) 形式,则得

$$\operatorname{rank}\phi(W)=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\right)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}^{C}=1$$

矛盾于 $\phi(W)\neq\mathbf{0}$。因此, ϕ 只能有引理1 中的(2) 形式,当然是保秩的。(2) $\Rightarrow$(1) 获证。

(1) $\Leftrightarrow$(3) 。见文献[9] 中的定理 1.3。

(1) $\Leftrightarrow$(4) 。由 T 的基数 $\geqslant 3$ 得, $\exists$ 两个不同的 n_1, n_2 (它们均小于 n) 及相应的两个矩阵 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ 使得

$$\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}_1)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_1=n_1,\quad \operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}_2)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_2=n_2。$$

因此适合引理 1 中的条件。若 ϕ 具有引理 1 的形式(1),则有 $\phi(\boldsymbol{A}_1)=\boldsymbol{E}=\phi(\boldsymbol{A}_2)$,从而导致 $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}_1)=n_1=\phi(\boldsymbol{A}_2)=n_2$,矛盾。故 ϕ 只能有引理 1 中的形式(2) 或形式(3), ϕ 当然是保秩的。 □

注记　引理 2 使得我们判断一个可乘映照 ϕ 是否保秩变得十分方便。例如 $n=100$, $\phi: M_n(\boldsymbol{F})\rightarrow M_n(\boldsymbol{F})$ 为一个可乘映照。若要判断是否为保秩的,只需任取一个秩为 1 的矩阵 $\boldsymbol{A}$,通过检验条件

$$\begin{cases}\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}\\ \phi(\boldsymbol{A})\neq\mathbf{0}\end{cases}$$

即可。特别地,只须验证 $\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 及 $\phi\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}_{100\times100}\neq\mathbf{0}$ 即可。又比如,若已知对 3 个秩不同的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, 有 $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}_1)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_1$, $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}_2)=\boldsymbol{A}_2$ 及 $\operatorname{rank}\phi(\boldsymbol{A}_3)=\boldsymbol{A}_3$,则也可立即判定 ϕ 是保秩的。

定理 1　设 $\boldsymbol{F}$ 为数域, $\|\cdot\|$ 为 $M_n(\boldsymbol{F})$ 上的范数,若 ϕ 保范数 $\|\cdot\|$,则 ϕ 可表为 $\phi(X)=\boldsymbol{R}(\tau(x_{ij}))R^{-1}$,其中, $\boldsymbol{R}$ 为一个可逆阵, τ 为数 $\boldsymbol{F}$ 上的一个单自同态, $X=(x_{ij})_{n\times n}$,为变元。

证明　ϕ 保范数 $\|\cdot\|$ 蕴含 $\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$。由 $\left\|\begin{matrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{matrix}\right\|\neq 0$ 知, $\phi\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\neq 0$。因此由引理2 可得, ϕ 可表为

$$\phi(X)=\boldsymbol{R}(\tau(x_{ij}))\boldsymbol{R}^{-1}$$

其中, $\boldsymbol{R}$ 为非奇异阵, $\tau: \boldsymbol{F}\rightarrow\boldsymbol{F}$ 为单环同态, $X=(x_{ij})$,为变元。 □

2　可乘保 F 范数映照,可乘保 1– 范数映照与可乘保 ∞– 范数映照的表示

$\forall\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\boldsymbol{C})$,让 $\|\boldsymbol{A}\|_F$, $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ 分别表 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数, 1– 范数,及 ∞– 范数。熟知, Frobenius 范数简称 F 范数, 1– 范数又叫列范数, ∞– 范数也叫行范数。进一步, $\|\boldsymbol{A}\|_F$ 和 $\|\boldsymbol{A}\|_1$ 实际上也就是文献[7] 中的向量(2, 2) 范数和向量(∞, 1) 范数。本节中,利用第 1 节的结果给出 $M_n(\boldsymbol{C})$ 及 $M_n(\boldsymbol{R})$ 上的保 F 范数可乘映照,保 1– 范数可乘映照及保 ∞– 范数可乘映照的完全表示。进而证明可乘保 1– 范数映照必是可乘保 F 范数映照,而可乘保 F 范数映照又必保持谱半径、数值半径、正规性及酉性等。

定理 2　设 $\phi: M_n(\boldsymbol{F})\rightarrow M_n(\boldsymbol{F})$ 为映照。

(i) 让 $\boldsymbol{F}=\mathbf{R}$,则 ϕ 为可乘保 F 范数映照当且仅当存在正交阵 $U\in M_n(\boldsymbol{R})$ 使得 ϕ 有形式 $\phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$;

(ii) 让 $\boldsymbol{F}=\mathbf{C}$,则 ϕ 为可乘保 F 范数映照当且仅当存在酉阵 $U\in M_n(\boldsymbol{C})$ 使得 ϕ 具有下列形式之一: (a) $\phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{*}$; (b) $\phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{*}$ 。

证明　(i) $\boldsymbol{F}=\mathbf{R}$ 情形下,若 ϕ 为可乘保 F 范数,则由定理 1, ϕ 可表为 $\phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{R}(\tau(x_{ij}))\boldsymbol{R}^{-1}$,其中, $\boldsymbol{R}$ 可逆, $X=(x_{ij})$ 为变元, τ 为 $\mathbf{R}$ 的一个单自同态。由于任何一个无理数皆可看成是一个有理数列的极限且此时的 τ 保绝对值,因此 $\phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{X}\boldsymbol{R}^{-1}$。让 d 为 $\boldsymbol{R}$ 的第 1 行的 Euchid 范数,则有 $\phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{R}d\boldsymbol{X}d^{-1}$

$\boldsymbol{R}^{-1}$。记 $\boldsymbol{B}=d\boldsymbol{R}=(b_{ij})$，则 $\Phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXB}^{-1}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 行向量的模为 1。$\forall(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，让 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1b_{11} & \cdots & x_1b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_nb_{11} & \cdots & x_nb_{1n}\end{pmatrix}$，则 $\|(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\|_2=\|(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\|_2\cdot\|(b_{11},\cdots,b_{1n})^{\mathrm{T}}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_F=\|\Phi(\boldsymbol{A})\|_F=\|\boldsymbol{BAB}^{-1}\|_F=\|\boldsymbol{BA}\dfrac{\boldsymbol{B}^{adj}}{\det\boldsymbol{B}}\|_F=\|\boldsymbol{BK}\|_F=\|\boldsymbol{B}(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\|_2$，其中，$\boldsymbol{B}^{adj}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的伴随阵，$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} x_1, & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$。结果 $\boldsymbol{B}$ 为保距变换，即 $\boldsymbol{B}$ 为正交阵。

反之，对一个正交阵 $\boldsymbol{U}\in M_n(\boldsymbol{R})$，由表达式 $\Phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{UXU}^{\mathrm{T}}$ 直接知：Φ 为可乘保 F 范数映照，因此(i)获证。

(ii) 当 $\boldsymbol{F}=\mathbf{C}$ 时，同样由定理 1 得 Φ 可表为：$\Phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{R}(\tau(x_{ij}))\boldsymbol{R}^{-1}$，其中，$\boldsymbol{R}$ 可逆，τ 为 $\mathbf{C}$ 上的一个单自同态。$\forall c\in\mathbf{C}$，由 $\|c\boldsymbol{I}_n\|_F=\sqrt{n}|c|$ 得 $\sqrt{n}|c|=\|\Phi(c\boldsymbol{I}_n)\|_F=\sqrt{n}|\tau(c)|$。因此 $|\tau(c)|=|c|$，从而 τ 还为 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的连续映照。由此易知 $\tau|_{\mathbf{R}}=1_{\mathbf{R}}$，$\tau(i)=i$ 或 $-i$。

当 $\tau(i)=i$ 时，τ 的显形式为：$\tau:\mathbf{C}\to\mathbf{C}, z\to z$；当 $\tau(i)=-i$ 时，τ 的显形式为：$\tau:\mathbf{C}\to\mathbf{C}, z\to z$。所以 Φ 必具有下列形式之一：(a) $\Phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{RXR}^{-1}$；(b) $\Phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{RXR}^{-1}$。类似于(i)的证明，且注意到酉阵即为酉空间中的保距变换，立得(ii)的完全证明。　□

推论 1　设 $\Phi:M_n(\boldsymbol{F})\to M_n(\boldsymbol{F})$ 为可乘映照，其中 $\boldsymbol{F}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$。若 Φ 保 F 范数，则 Φ 必保谱半径、数值半径、正规性、酉性、自伴性和正定性。

作为定理 1 的更多应用，下面给出可乘保 1- 范数映照和可乘保 ∞- 范数映照的完全表示。首先，引入如下定义：

定义 2　对方阵 M，若 M 的每一行每一列均只有 1 个元素非 0，且该非零元素 $\in\{1,-1\}$，则称 M 为一个简单阵。

定理 3　设 $\Phi:M_n(\mathbf{R})\to M_n(\mathbf{R})$ 为映照。Φ 为可乘保 1- 范数映照当且仅当 Φ 可表示为 $\Phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MXM}^{-1}$，其中，$M$ 为 $\mathbf{R}$ 上的某简单阵，$\boldsymbol{X}$ 为变元。

证明　$\Leftarrow$) 简单阵是一系列形如 $P(i(-1))$，$P(i,j)$ 的初等矩阵的乘积。显见此时 Φ 是可乘的保列范数的映照。

$\Rightarrow$) 由定理 1 及 $\mathbf{R}$ 上的单自同态只有恒等同态知，Φ 可表为：$\Phi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXA}^{-1}$，其中，$\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbf{R}$ 上某可逆阵。接下来考察 $\boldsymbol{A}$。$\forall(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，让 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1a_{11} & x_1a_{12} & \cdots & x_1a_{1n} \\ x_2a_{11} & x_2a_{12} & \cdots & x_2a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_na_{11} & x_na_{12} & \cdots & x_na_{1n}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

上式中，设 $|a_{1j_1}|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|a_{1j}|$，取 $(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $(0,\cdots,\underset{j_1}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，然后两边取 1- 范数，于是由 $\boldsymbol{A}$ 的可逆性知：$|a_{1j_1}|\neq 0$，且有

$$|a_{1j_1}|=\left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right\|_1=\left\|\begin{pmatrix} a_{1j_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{j_1j_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{nj_1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right\|_1=|a_{1j_1}|+\cdots+|a_{nj_1}|$$

所以 $a_{2j_1}=\cdots=a_{nj_1}=0$。

同样地,对 A 的第2行,让 $|a_{2j_2}|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_{2j}|$,施行前述过程,则可得 $a_{1j_2}=a_{3j_2}=\cdots=a_{nj_2}=0$。再次注意到 A 可逆,于是 $j_1\neq j_2$,由此最终得到 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$,使得:A 中除了 a_{1j_1},$a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 外,其余元素皆为0。最后,为确定 $a_{1j_1},\cdots,a_{nj_n}$ 的值,让 $A^{adj}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$ 表 A 的伴随阵,$D(A)$ 表 A 的行列式。在式子 $\phi(X)=AXA^{-1}$ 中取 X 为 E_{ij},于是得 $|AE_{ij}A^{-1}|_1=\|E_{ij}\|_1=1$。注意到

$$AE_{ij}A^{-1}=AE_{ij}\frac{A^{adj}}{D(A)}=\frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix}a_{1i}A_{1j} & a_{1i}A_{2j} & \cdots & a_{1i}A_{nj}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{ni}A_{1j} & a_{ni}A_{2j} & \cdots & a_{ni}A_{nj}\end{pmatrix}$$

于是

$$\|AE_{ij}A^{-1}\|_1=\frac{1}{|D(A)|}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|\right)\cdot\max_{1\leqslant l\leqslant n}|A_{lj}|=1$$

固定 j,让 $i=1,\cdots,n$,则得 $\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|$ 为同一个值,换句话说,$|a_{1j_1}|=|a_{2j_2}|=\cdots=|a_{nj_n}|$。现让 $M=\frac{1}{a_{1j_1}}A$,结果 M 为简单阵,且 $\phi(X)=MXM^{-1}$。定理3获证。 □

定理4 设 ϕ: $M_n(\mathbf{R})\to M_n(\mathbf{R})$ 为映照,则 ϕ 为可乘保 ∞- 范数映照当且仅当 ϕ 有形式 $X\to MXM^{-1}$,其中,M 为简单阵。

证明 类似于定理3的证明。 □

推论2 设 ϕ: $M_n(\mathbf{R})\to M_n(\mathbf{R})$ 为映照,则 ϕ 是保1- 范数可乘映照等价于 ϕ 为保 ∞- 范数可乘映照。进一步,当 ϕ 为可乘保1- 范数映照时,ϕ 也必为保 F 范数。

证明 只需注意到简单阵为正交阵,结合定理2即可。 □

注记 由定理3的证明容易看出,也可给出 $M_n(\mathbf{C})$ 上可乘保1- 范数映照和可乘保 ∞- 范数映照的完全表示如下:ϕ: $M_n(\mathbf{C})\to M_n(\mathbf{C})$ 为可乘保1- 范数映照等价于 ϕ 为可乘保 ∞- 范数映照,也等价于 ϕ 具有形式 $X\to MXM^{-1}$ 或 $X\to \overline{MXM^{-1}}$,其中,M 为简单阵。

参 考 文 献:

[1] Moln r L. Some Multiplicative Preservers on $B(H)$ [J]. Lin. Alg. Appl., 1991, 301: 1- 13.

[2] Moln r L. Multiplicative Maps on Ideals of Operators Which Are Local Automorphisms [J]. Acta Sci. Math. (Szeged), 1999, 65(3- 4): 727- 736.

[3] Martindale W S. When Are Multiplicative Mappings Additive? [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 21: 695- 698.

[4] Hou J. Multiplicative Maps on $B(X)$ [J]. Science in China Ser. A, 1998, 41(4): 337- 345.

[5] Hochwald S H. Multiplicative Maps on Matrices That Preserve the Spectrum[J]. Lin. Alg. Appl., 1994, 212/213: 339- 351.

[6] Cheung W S, Fallat S, Li C K. Multiplicative Preservers on Semigroups of Matrices[J]. Lin. Alg. Appl., 2002, 355: 173- 186.

[7] Klaus A L, Li C K. Isometries for the Vector(p, q) Norm and the Induced (p, q) Norm[J]. Linear Multilinear Algebra, 1995, 38(4): 315- 332.

[8] Jodeit Jr M, Lam T Y. Multiplicative Maps of Matrix Semigroups[J]. Arch. Math., 1969, 20: 10- 16.

[9] An G M, Hou J. Multiplicative Maps on Matrix Algebras[J]. J. of Shanxi Teacher's University, 2002, 16(1): 1- 4.