

文章编号: 1001-2486(2008)03-0122-06

# 一种参数曲线实时数控插补计算新方法\*

孙海洋, 范大鹏, 李玲

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 根据参数曲线数控插补原理, 指出了 Taylor 展开算法、“参数-弧长”分段拟合算法等常用的参数曲线直接插补算法存在理论上的局限性。给出了一种新的基于牛顿迭代计算的参数曲线直接插补方法, 并给出了算法流程。新算法稳定性好、收敛速度快、运算量小、计算结果精度高。仿真实验表明, 同 Taylor 展开法相比, 能够在计算量相当或增加不大的情况下将插补进给速度波动率减小  $10^2 \sim 10^7$  倍。

**关键词:** 数控加工; 参数曲线; 实时插补; 进给速度波动; 牛顿迭代法

**中图分类号:** TP391; TP273 **文献标识码:** A

## A Novel Method for Real-time CNC Curved Path Interpolation Calculating

SUN Hai-yang, FAN Da-peng, LI Ling

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Based on the principle of parametric curve paths CNC interpolating, it is pointed out that the Taylor series methods and “Parameter-Arc length” curve fitting methods for CNC curved path interpolation are not perfect in theory. Thus a novel curved path interpolation method is proposed with Newton iteration functions. The detailed realization of the proposed algorithm has also been given. It has many advanced features, such as good stability, fast convergence, low computational effort and high precision. Simulations and experimentations show that the proposed algorithm can reduce the feedrate fluctuation by  $10^2 \sim 10^7$  times with equal or little more computational effort comparing with Taylor series methods.

**Key words:** CNC machining; parametric curves; real-time interpolation; feedrate fluctuation; Newton iteration method

现代 CAD/CAM 系统通常采用参数曲线来表示设计零件的复杂表面, 如模具、航空航天器模型、汽车模型。传统数控通常采用 G 代码形式将 CAM 数据离散为微小线段或圆弧段进行加工。这不仅会带来巨大数据量存储传输问题, 而且离散的(微)弧线段破坏了加工面的光滑性且大量微小线段连续插补时将使机床驱动电机频繁加减速, 最终使加工零件尺寸精度和表面精度都受到限制。因此, 直接接收 CAD/CAM 设计模型的参数曲线进行高速数控加工逐渐成为高性能数控系统的必要功能。参数曲线的直接数控插补本质上是用弦长来逼近对应的微弧段。但是, 目前常用的参数曲线实时插补算法<sup>[1-10]</sup>, 如等参数插补法<sup>[1]</sup>、Taylor 展开法<sup>[2-8]</sup>、“参数-弧长”分段拟合法<sup>[9-10]</sup>等, 并不满足这一原理, 致使参数曲线插补时的理想进给速度指令与实际进给速度指令之间有着较大的波动, 并且理论上也无法避免。这种进给速度波动是有害的, 会导致加工精度下降, 需要加以抑制。本文根据“弦长逼近弧长”这一数控插补原理, 给出了可无限逼近指令进给速度的插补实时计算方法, 从理论上解决了参数曲线实时插补的进给速度波动问题, 且运算量小、易于实现。

### 1 参数曲线数控加工直接插补原理

目前几何造型中常用的参数曲线有 Bezier 曲线、B 样条曲线、NURBS 曲线等。同直线、圆弧不同, 参数曲线的“参数-弧长”是非线性关系, 而数控加工中则按照“插补周期(时间)-弧(弦)长”进行实时插

\* 收稿日期: 2007-10-25

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(05JJ30109)

作者简介: 孙海洋(1977-), 男, 博士生。

补,因此如何准确计算出  $\Delta u$  是实时插补能否连续进行的关键。在定周期实时插补中,  $\Delta u$  的计算通常是按预先制定的插补进给速度进行的。如图 1 所示,数控加工中,设参数曲线  $R(u)$  为理想刀具轨迹,当前插补点为  $P_i = R(u_i)$ ,下一个插补点  $P_{i+1} = R(u_{i+1})$ ,指定的瞬时插补进给速度为  $V_{rfi}$ ,插补周期为  $T$ 。实时插补时通常采用弦线  $\overline{P_i P_{i+1}}$  逼近弧段  $\overleftarrow{P_i P_{i+1}}$  来实现对整个刀具轨迹  $R(u)$  的逼近,理想情况下有

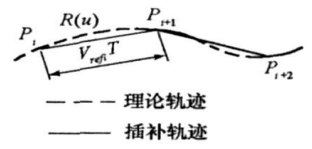


图1 参数曲线数控插补原理  
Fig. 1 The principle of CNC curved path interpolation

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u; \quad V_{rfi} T = \|P_i P_{i+1}\|; \quad \|P_i P_{i+1}\| \approx \int_{u_i}^{u_{i+1}} \|R'(u)\| du$$

在实时参数曲线插补时,为获得较好的加工效果,通常会根据具体加工工艺,事先给理想刀具进给速度轮廓  $V_{rf}(u)$ ,如关键区域的加减速规划等。对于理论刀具加工轨迹曲线  $R(u)$ ,设当前插补点参数为  $u_i$ ,设定瞬时插补进给速度为  $V_{rfi}$ ,则下一理想插补点参数  $u_{i+1}$  满足下式:

$$\|R(u_{i+1}) - R(u_i)\| = V_{rfi} T \quad (1)$$

如何获得满足式(1)的  $u_{i+1}$  将成为实时插补计算的关键。由于参数曲线的弧长与其参数之间存在非线性关系,大多数参数曲线为自由曲线,无法用精确的解析表达式表示,无法采用直接求解法计算  $u_{i+1}$ ,只能求取  $u_{i+1}$  的近似解  $\tilde{u}_{i+1}$ 。由于这种解的近似性,理想进给速度  $V_{rfi}$  无法准确达到,实际插补速度变为  $V_i = \|R(\tilde{u}_{i+1}) - R(u_i)\|/T$ ,那么,由于  $V_{rfi} \neq V_i$ ,造成了瞬时插补进给速度的波动。所谓实时插补进给速度波动是指在实时插补过程中,理想的进给速度指令与实际发出的进给速度指令之间的差异。这种差异是由于无法精确计算下一插补点参数  $u_{i+1}$  造成的。定量描述进给速度波动如下:

定义 对于给定的参数曲线  $R(u)$ ,设目标进给速度为  $V_{rfi}$ ,插补周期为  $T$ ,当前点参数为  $u_i$ ,下一实际插补点参数为  $u_{i+1} = u_i + \Delta u$ ,那么实际插补进给速度波动  $\Delta V_i$  如下:

$$\Delta V_i = V_{rfi} - \frac{\|R(u_{i+1}) - R(u_i)\|}{T} \quad (2)$$

则当前瞬时插补段进给速度波动率  $\delta_i$  定义为

$$\delta_i = \left[ 1 - \frac{\|R(u_{i+1}) - R(u_i)\|}{V_{rfi} T} \right] \times 100\% \quad (3)$$

$\delta_i$  定量表达了理想进给速度指令与实际进给速度指令之间的差异。因此,可以把整个插补段的  $\{\delta_i\}$  作为衡量实时插补算法的指标之一。通常用最大速度波动率  $\max\{|\delta_i|\}$  或  $\left(\sum \delta_i^2\right)^{1/2}$  作为评价参数曲线实时插补器性能的一个指标。

在高速数控加工中,切削速度对加工质量有着直接影响,进给速度波动不仅会导致加工工件表面质量下降,甚至还有可能引起震颤,影响加工质量。分析指出,只要获得足够精确的下一插补点参数  $u_{i+1}$  的近似解  $\tilde{u}_{i+1}$ ,就可使实际插补指令足够逼近理论插补指令,从而有效地抑制进给速度波动。

## 2 参数曲线实时插补算法回顾

目前对参数曲线实时数控插补方法中基本上可以划分为三种思路:(1)等参数插补法<sup>[1]</sup>;(2)Taylor展开法<sup>[2-8]</sup>;(3)“参数( $u_k$ )—弧长( $s_k$ )”分段拟合法<sup>[9-10]</sup>。

等参数插补法首先由 Bedi<sup>[1]</sup>等提出,旨在实现数控加工参数曲线直接插补。由于弧长与参数之间存在非线性关系,采用这种方法,瞬时插补速度和插补误差均无法控制,可能会造成无法预计的进给速度波动,因此等参数插补法无法应用于实际 CNC 加工。尽管如此,该方法首次给出了参数曲线直接实时插补解决方案。该方法很快被 Taylor 展开法所替代。

Taylor 展开法的主要思路为:对参数  $u(t)$  进行 Taylor 展开逼近,然后获得下一个实时插补点参数  $u_{i+1}$  的估计方法。如一阶 Taylor 展开法<sup>[2-3,7]</sup>、二阶 Taylor 展开法<sup>[4,7]</sup>、一阶 Taylor 展开误差修正法<sup>[8]</sup>、预

测纠正迭代法<sup>[5-6]</sup>等。Taylor 展开法使参数曲线直接插补应用于加工实践成为可能。但是严格来讲这种思路是不合适的,存在理论上的不足。分析如下:采用 Taylor 展开式计算  $u_{i+1} = u_i + \Delta u$ , 本质上是使  $V_{refi}T$  尽可能逼近插补段弧长  $\int_{u_i}^{u_{i+1}} \|R'(u)\| du$ 。根据曲线插补原理, 刀具瞬时插补路径应为微线段  $\overline{P_i P_{i+1}}$ , 而非微弧段  $P_i P_{i+1}$ 。从理论上讲, 即使 Taylor 展开级数趋于无限次(极限情况),  $V_{refi}T$  所逼近的极值等于弧长  $\int_{u_i}^{u_{i+1}} \|R'(u)\| du$ , 而非弦长  $\|P_i P_{i+1}\|$ , 故理论上瞬时进给速度波动仍无法避免, 这是参数曲线直接插补原理决定的。因此, 采用 Taylor 展开法计算  $u_{i+1}$  并不合适。

“参数( $u_k$ ) - 弧长( $s_k$ )”分段拟合法的主要思路: 建立“参数( $u_k$ ) - 弧长( $s_k$ )”对应表  $\left\{ \left( u_k, s_k \right) \right\}$ , 采用分段拟合方法对下一个实时插补点参数  $u_{i+1}$  进行估计, 如文献[9-10]。但严格来讲这种思路也是不合适的, 存在理论上的局限性。因为, 即使弧长细分段数无限大时(极限情况),  $V_{refi}T$  逼近的极值仍然等于弧长  $\int_{u_i}^{u_{i+1}} \|R'(u)\| du$ , 而非弦长  $\|P_i P_{i+1}\|$ , 理论上进给速度波动同样无法避免。

### 3 参数曲线数控插补新思路

根据数控加工的参数曲线直接插补原理, 获得下一插补点的目标是逼近对应的弦长, 而非弧长。即下一个插补点必须是满足式(1)的参数曲线上的点。因此, 下一插补点参数的计算可抽象为以下数学问题: 已知参数曲线  $R(u)$ , 对于给定的弦长  $L$ , 当  $u = u_i$  时, 沿曲线方向找出点  $u = u_{i+1}$ , 使得  $\|R(u_{i+1}) - R(u_i)\| = L$ 。通常情况下, 该问题的精确解  $u_{i+1} = \xi^*$  无法获得, 只能获得近似解  $u_{i+1} = \tilde{\xi}$ 。近似解  $\tilde{\xi}$  与精确解  $\xi^*$  之间的差异即为参数曲线实际插补进给速度波动的根本原因所在。如果得到该问题的足够精确解, 那么插补进给速度波动率就可以有效地控制在理想水平。该问题本质为非线性函数求解问题。在 CAD/CAM 中, 通常要求参数曲线为正则曲线, 即每一点处的切向量都不为 0, 即  $|R'(u)| > 0$  在参数定义域上恒成立。因此, 可采用牛顿迭代法解该问题。

#### 3.1 牛顿迭代方程确定

若目标进给速度为  $V_{refi}$ , 插补周期为  $T$ , 则  $L = V_{refi}T$ 。设当前插补点参数为  $u_i$ , 下一个插补点参数为  $\xi$ 。当前插补点  $R(u_i)$  与下一个插补点  $R(\xi)$  构成的矢量为  $L_\xi$ , 则  $\|L_\xi\| = \|R(\xi) - R(u_i)\|$ 。构造函数

$$F(\xi) = V_{refi}T - \|L_\xi\| \quad (4)$$

那么所需要解决的问题为: 对于函数  $F(\xi)$ , 求参数  $\xi = \xi^*$ , 满足条件  $F(\xi^*) = 0$ 。采用牛顿迭代法来解决这个问题。标准的牛顿迭代格式为

$$\xi_{k+1} = \xi_k - \frac{F(\xi_k)}{F'(\xi_k)} \quad (5)$$

式中,  $\xi_k, \xi_{k+1}$  分别为  $k$  次迭代和  $k+1$  次迭代结果,  $k$  为整数;  $F'(\xi_k)$  为  $F(\xi)$  在  $\xi = \xi_k$  处的一阶导数值。由于在一个插补周期内  $V_{refi}, T$  都是常量, 直接对  $F(\xi)$  求一阶导数, 则有

$$F'(\xi) = -d\left(\|R(u_i) - R(\xi)\|\right)/d\xi \quad (6)$$

对应笛卡儿坐标系, 式(6)为

$$F'(\xi) = -\frac{1}{\|L_\xi\|} \left\{ [X(\xi) - X(u_i)] X'(\xi) + [Y(\xi) - Y(u_i)] Y'(\xi) + [Z(\xi) - Z(u_i)] Z'(\xi) \right\} \quad (7)$$

若弦长矢量  $L_\xi$  方向的单位矢量  $\frac{L_\xi}{\|L_\xi\|}$  记为  $E_\xi$ ,  $u = \xi$  处的导矢量记为  $R'_\xi$ , 即

$$E_\xi = \left( \frac{X(\xi) - X(u_i)}{\|L_\xi\|}, \frac{Y(\xi) - Y(u_i)}{\|L_\xi\|}, \frac{Z(\xi) - Z(u_i)}{\|L_\xi\|} \right); \quad R'_\xi = (X'(\xi), Y'(\xi), Z'(\xi))$$

则式(7)可写为

$$F'(\xi) = -E_{\xi} \cdot R'_{\xi} \quad (8)$$

式(8)的物理含义为构造函数  $F(\xi)$  的导数  $F'(\xi)$  为弦长单位矢量  $E_{\xi}$  与参数曲线导数矢量  $R'_{\xi}$  的内积。牛顿迭代格式(5)可写为

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \left( E_{\xi_i} \cdot R'_{\xi_i} \right)^{-1} F(\xi_i) \quad (9)$$

对于正则参数曲线  $R(u)$ , 具有连续可导性, 因此, 迭代式(9)至少超线性收敛<sup>[11]</sup>。

### 3.2 牛顿迭代式初值选取

牛顿迭代式有着超线性收敛特性, 但它的收敛速度与迭代式的初值选择有着很大关系, 如果初值选择不当, 可能会导致收敛速度缓慢; 如果初值选择在真值附近, 将迅速收敛。下面讨论如何选择式(9)迭代的初始值。

根据插补原理, 为了避免速度波动, 下一步理想的插补点  $R(\xi^*)$  应在弦长  $L = V_{ref}T$  处, 由于弦长很小, 即  $L \ll 1$ , 那么可以用弧长来近似表示弦长(弧长可以用积分表示, 利于数学处理):

$$L \approx \int_{u_i}^{\xi^*} \left\| \frac{dR(u)}{du} \right\| du = \int_{u_i}^{\xi^*} \|R'(u)\| du \quad (10)$$

利用中值定理, 式(10)可以变为

$$L \approx \int_{u_i}^{\xi^*} \left\| \frac{dR(u)}{du} \right\| du = \|R'(\theta)\| (\xi^* - u_i) \quad (11)$$

其中,  $\theta \in [u_i, \xi^*]$ 。由于  $L \ll 1$ , 为了便于计算, 做近似处理, 取  $\theta = u_i$ , 那么, 式(11)可进一步写为

$$L \approx \|R'(u_i)\| (\xi^* - u_i) \quad (12)$$

牛顿迭代式(9)的初值  $\xi_0$  选取尽量接近于真值  $\xi^*$ , 由式(12), 取  $\xi_0$  为

$$\xi_0 = u_i + \frac{V_{ref}T}{\|R'(u_i)\|} \quad (13)$$

式(13)即为牛顿迭代式初值计算公式。观察可发现式(13)与  $u(t_i + T)$  一阶 Taylor 展开式一致。式(13)表明, 牛顿迭代法给出的初值  $\xi_0$  就可达到一阶 Taylor 展开法同样的精度。同时, 如图

2所示, 式(13)保证了  $\xi_0$  的取值就在真值附近, 因此牛顿迭代式(9)不会收敛在“伪”收敛点, 保证了该算法的稳定性。

### 3.3 牛顿迭代式运算终止条件设定

设定参数结果误差  $\varepsilon$ , 当  $|\xi_{i+1} - \xi_i| \leq \varepsilon$  时结束迭代, 这是牛顿迭代算法通常采用的终止条件。但在这里并不是最佳方法, 因为, 当  $|\xi_{i+1} - \xi_i| \leq \varepsilon$  条件满足时, 不一定能够达到插补速度控制精度的需要。因此, 本文采用式(3)的速度波动率指标设定  $\delta$  作为牛顿迭代式(9)的终止条件。为了满足插补实时性要求, 本文还对迭代次数设立了最大上限  $N$ , 与  $\delta$  混合使用。如果迭代次数在  $N$  次以内就达到了精度要求, 则可提前结束迭代运算; 若迭代  $N$  次后仍未达到迭代精度, 也结束迭代, 以确保实时性要求。

### 3.4 插补算法流程

由牛顿迭代式(9)可知, 当迭代结束时, 取  $u_{i+1} = \xi_i$ ,  $u_{i+1}$  又将作为下一个插补点计算的出发点。此时  $R(\xi_i)$ 、 $R'(\xi_i)$  的值已经求出, 可以直接用于下次迭代运算的初值计算。因此, 采用本文算法, 除第一次插补需要计算当前插补点值与导数值外, 其余的均可利用上个插补周期的计算结果, 这可有效地减少计算量。以本文算法1次迭代为例, 它每个插补周期内只需进行1次曲线求值、求导运算(第一个插补周期除外), 这使得本文算法1次迭代计算量与一阶 Taylor 展开法相当, 却可以获得更好的进给速度波动控制效果。对于给定的参数曲线  $R(u)$ , 当前插补点为  $u_i$ , 插补周期为  $T$ , 理想插补进给速度为

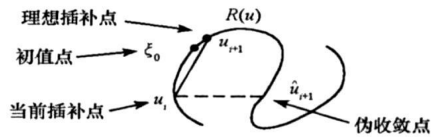


图2 牛顿迭代的“伪”收敛点

Fig. 2 The pseudo-convergence point of the Newton iteration functions

$V_{refi}$ , 预设最大迭代次数为  $N$  次, 设定插补速度控制精度  $\delta$ 。则计算下一个理想插补点  $u_{i+1}$  的计算流程为:

- Step 1 若  $i=0$ , 则计算出  $R(u_0)$ 、 $R'(u_0)$ ; 否则进入 Step 2;
- Step 2 迭代次数  $k$  置 0; 根据式(13) 计算迭代初值  $\xi_0$ ;
- Step 3 计算出  $R'(\xi_0)$ 、 $R(\xi_0)$ ;
- Step 4 根据式(9) 进行迭代运算, 得到迭代结果  $\xi_k$ ;
- Step 5 判断  $|\|R(u_i) - R(\xi_k)\| - V_{refi}T| / (V_{refi}T) \leq \delta$  是否成立, 是则转 Step 7, 否则进入 Step 6。
- Step 6 判断  $k \leq N$  是否成立, 是则更新迭代次数  $k = k + 1$ , 并转 Step 4; 否则进入 Step 7。
- Step 7 迭代结束。下一插补点参数即为  $u_{i+1} = \xi_k$ , 保存  $R(\xi_k)$ 、 $R'(\xi_k)$ , 为下一插补周期运算作数据准备。

### 4 仿真对比实验

#### 4.1 仿真条件

仿真实验分别以一阶 Taylor 展开法、二阶 Taylor 展开法作为参照, 本文算法迭代终止条件中迭代次数  $N$  分别设为 1 次和 2 次, 速度波动率  $\delta$  均设为 0。仿真实验选用 NURBS 曲线作为参数曲线(图 3), 曲线参数见表 1。为简化起见, 仿真中理想插补进给速度设为恒定值:  $V_{ref}(u) = 60\text{mm/s}$ ; 插补周期  $T = 0.002\text{s}$ 。实验共分四组: 一阶 Taylor 展开法、二阶 Taylor 展开法、本文算法 1 次迭代 ( $\delta = 0, N = 1$ )、本文算法 2 次迭代 ( $\delta = 0, N = 2$ )。

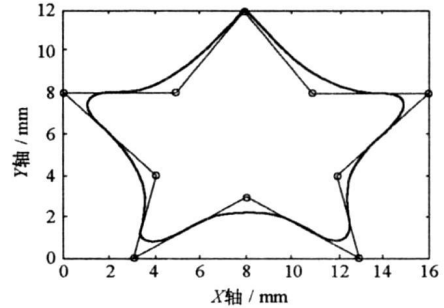


图 3 用于仿真的 NURBS 曲线  
Fig. 3 The NURBS path for simulation

表 1 NURBS 曲线参数表

Tab. 1 The NURBS path's parameters

控制点	(8, 12, 0); (5, 8, 0); (0, 8, 0); (4, 4, 0); (3, 0, 0); (8, 3, 0); (13, 0, 0); (12, 4, 0); (16, 8, 0); (11, 8, 0); (8, 12, 0)
权值	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
节点	(0, 0, 0, 0.111, 0.222, 0.333, 0.444, 0.555, 0.666, 0.777, 0.888, 1, 1, 1)

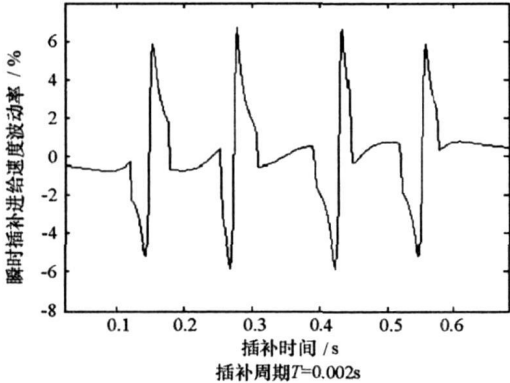


图 4 一阶 Taylor 展开法进给速度波动率  
Fig. 4 The feedrate fluctuation rates of the 1st Taylor series method

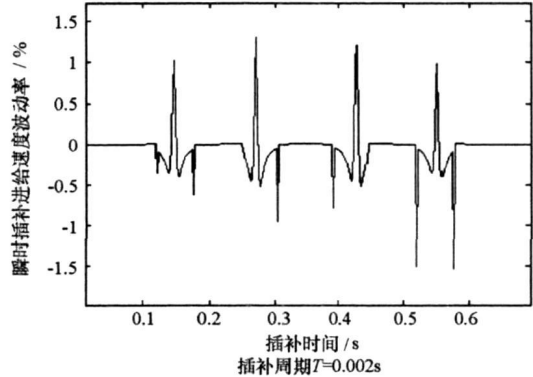


图 5 二阶 Taylor 展开法进给速度波动率  
Fig. 5 The feedrate fluctuation rates of the 2nd Taylor series method

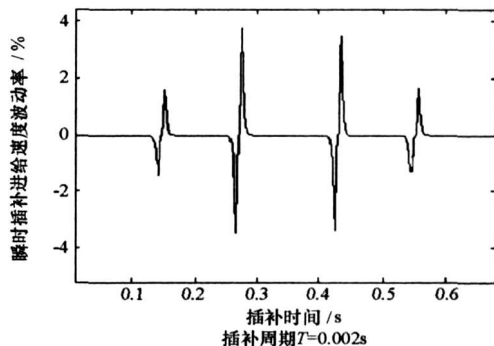
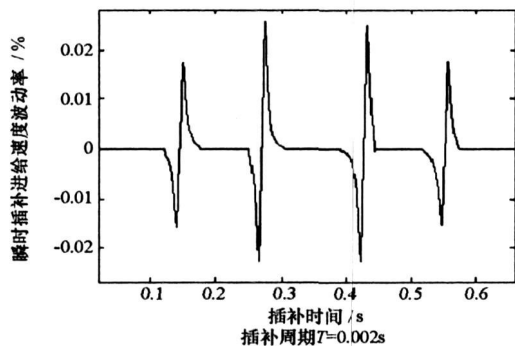


图6 本文算法  $N = 1, \delta = 0$  时进给速度波动率

Fig. 6 The feedrate fluctuation rates of the proposed method when  $N = 1, \delta = 0$

图7 本文算法  $N = 2, \delta = 0$  进给速度波动率

Fig. 7 The feedrate fluctuation rates of the proposed method when  $N = 2, \delta = 0$

表2 不同参数曲线插补方法对比

Tab. 2 Comparing CNC curved path interpolation methods

插补方法	一阶 Taylor 展开法	二阶 Taylor 展开法	本文算法 $N = 1, \delta = 0$	本文算法 $N = 2, \delta = 0$
进给速度波动率最大值	6.63%	1.53%	$2.26 \times 10^{-2}\%$	$3.79 \times 10^{-7}\%$
一次插补计算量	曲线求值、求一阶导运算各 1 次	曲线求值、求一阶导、求二阶导运算各 1 次	曲线求值、求一阶导运算各 1 次	曲线求值、求一阶导运算各 2 次
算法综合评价	劣	较差	好	好

(注: 算法综合评价依据[a] 计算量; [b] 进给速度波动率)

## 4.2 仿真结果及分析

四组仿真实验的“时间-速度波动率”曲线分别见图 4~7, 实验结果统计见表 2。从仿真实验结果来看, 一阶 Taylor 展开法的进给速度波动率最高(6.63%), 而本文算法 2 次迭代算法进给速度波动率最低( $3.79 \times 10^{-7}\%$ )。以一阶 Taylor 展开法为参照, 本文算法 1 次迭代运算量与之相当, 但进给速度波动率降低了百倍( $10^2$ ); 本文算法 2 次迭代运算量虽增加一倍, 但进给速度波动率降低了千万倍( $10^7$ )。相比之下, 二阶 Taylor 展开法与一阶 Taylor 展开法相比优势并不明显, 其进给速度波动率均在同一数量级上, 而运算量前者比后者增加数倍。可见, 仿真结果验证了本文结论的正确性和算法的有效性。与 Taylor 展开法比, 本文算法更合乎参数曲线直接插补的“弦长逼近弧长”本质。由于采用了牛顿迭代法求解下一插补点参数, 并选择了合理的迭代初值, 不仅使迭代方程快速收敛, 而且还排除了“伪”收敛点, 从而获得了很好的进给速度波动控制效果。

## 5 小结

本文通过对数控加工插补原理进行分析, 指出了 Taylor 展开法和分段拟合法等参数曲线实时插补算法的局限性。这种局限性使得无法从理论上消除插补过程中的进给速度波动。基于此, 本文给出了一种新的参数曲线实时插补计算方法, 从理论上较为精确地解决了进给速度波动问题。仿真实验表明, 本文给出的参数曲线数控实时插补算法具有算法稳定、收敛快、运算量小、精度高、易于实现等特点。

## 参考文献:

- [1] Bedi S, Ali I, Quan N. Advanced Techniques for CNC Machines[J]. Trans. ASME J. Engng. Industry, 1993(115): 329- 336.
- [2] Yang D C H, Kong T. Parametric Interpolator Versus Linear Interpolator for Precision CNC Machining[J]. Computer-aided Design, 1994(26): 225- 235.
- [3] Yau H T, Tsang M, Tsai M S. Real-time NURBS Interpolation Using FPGA for High Speed Motion Control[J]. Computer-aided Design, 2006(38): 1123- 1133.
- [4] Tikhon M, Ko T J, Lee S H, et al. NURBS Interpolator for Constant Material Removal Rate in Open CNC Machine Tools[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2004(44): 237- 245.
- [5] Tsai M C, Cheng C W. A Real-time Predictor-corrector Interpolator for CNC Machining[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2003, 8(125): 449- 460.
- [6] Cheng M Y, Tsai M C, Kuo J C. Real-time NURBS Command Generators for CNC Servo Controllers[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2002(42): 801- 813.
- [7] Rila T F, Tsai Y F. Exact Taylor Series Coefficients for Variable-feedrate CNC Curve Interpolators[J]. Computer-aided Design, 2001(33): 155- 165.
- [8] Yeh S S, Hsu P L. The Speed-controlled Interpolator for Machine Parametric Curves[J]. Computer-aided Design, 1999(31): 349- 357.
- [9] 陈金成, 钟延修. 基于 Gauss-legendre 求积的参数曲线实时插补[J]. 上海交通大学学报, 2002(8): 1104- 1108.
- [10] Lei W T, Sung M P, Lin L Y, et al. Fast Real-time NURBS Path Interpolation for CNC Machine Tools[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2006(11): 1- 12.
- [11] 张可村, 赵英良. 数值计算的算法与分析[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 39- 71.